3.1　岩石の破壊（2）

線形破壊力学

　線形破壊力学の考え方を理解する。

凝着力 and/or 塑性変形

　クラック先端の応力集中を緩和するメカニズムについて理解する。

断層の摩擦則

　速度・状態依存摩擦についてある程度理解する。

参考文献：

① 大中・松浦, 地震発生の物理学, 東京大学出版

② 松浦,　地球連続体力学（５章）,　岩波講座地球惑星科学

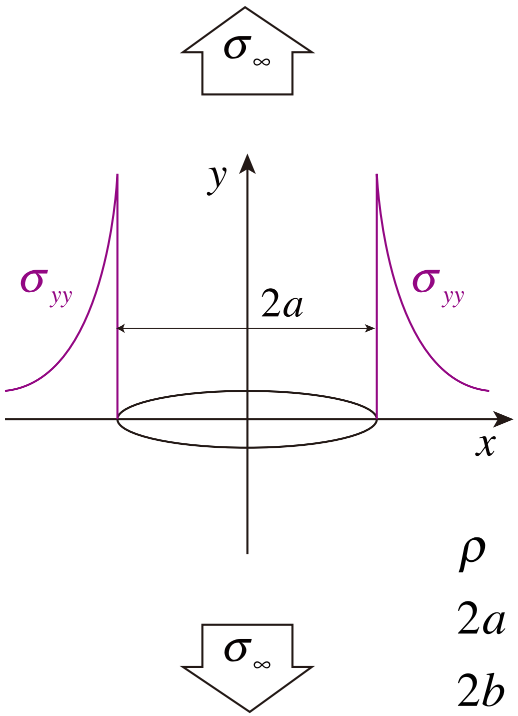
③ 吉田, 弾塑性力学の基礎, 共立出版

④ 中谷・永田（2009）速度・状態依存摩擦とその物理, 地震2, S159-S526

線形破壊力学 1

楕円の応力集中

単純なモデルから考える。無限遠方で、
応力 σ_∞ が作用している場合



ρ 先端の曲率半径
$2a$ 長軸
$2b$ 短軸

楕円の形状が応力 σ_{yy} の形状をコントロールするはず。この形状は、

$$\sigma_{yy}\Big|_{y=0} \approx \sigma_\infty \left\{ \sqrt{\frac{a}{2\xi+\rho}} \left(1+\frac{\rho}{2\xi+\rho}\right) + \frac{\rho}{2\xi+\rho} \right\}$$

$\xi = x - a$

となることが知られている。最大値は
$x = a$ の時なので、

$$\max(\sigma_{yy}) = \sigma_\infty \left(1+\frac{2a}{b}\right)$$

どの程度の応力が集中しているのかを、
応力集中係数 $\alpha = \max(\sigma_{yy})/\sigma_\infty$ で計ると

$$\alpha = 1+\frac{2a}{b} = 1+2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \qquad \because \rho = \frac{b^2}{a}$$

クラックは、先端は鋭い。つまり、

$$\rho \to 0 \qquad a \gg b$$

を考えれば良い。

線形破壊力学２

クラック先端の応力場と応力拡大係数

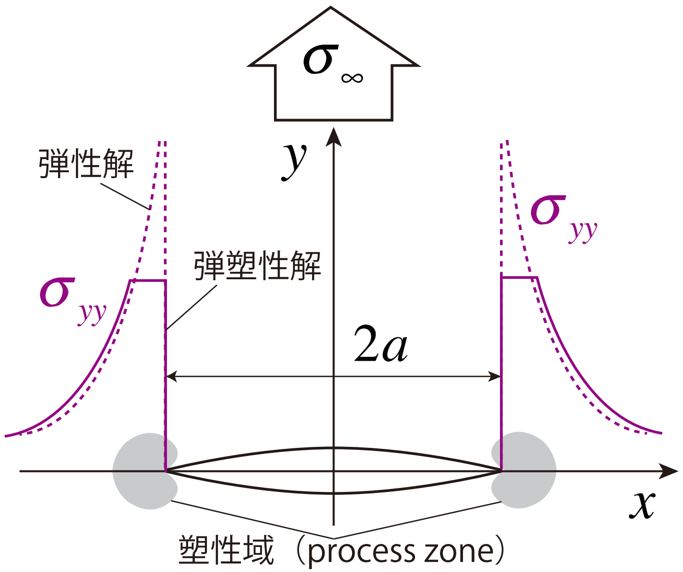
楕円項の応力の式で、

$$\rho \to 0 \qquad a \gg b$$

の場合を考える（モードI）。

$$\sigma_{yy} = \sigma_{\infty}\sqrt{\frac{a}{2\xi}}$$

つまり、応力は $1/\sqrt{\xi}$ に比例するので、$\xi \to 0$ のとき、∞ に発散する。つまり、応力は $1/\sqrt{\xi}$ の特異性を持つ。



応力の大きさやクラック半径が変わっても、応力の形を定義する $\sigma_{\infty}\sqrt{a}$ は変わらない。よって、応力拡大係数を

$$K_I = \sigma_{\infty}\sqrt{\pi a}$$

と定義して、応力の集中度合いを計る。y=0以外の応力と変位は、

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta)$$

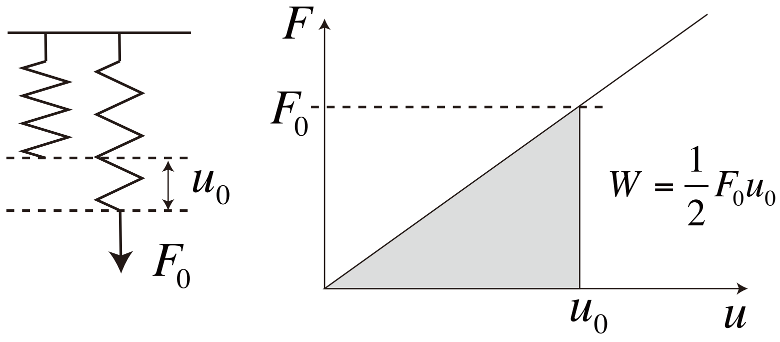
$$u_i = \frac{K_I}{4\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\ g_i(\theta, v)$$

で求まる。v はポアソン比

重要なのは、応力が ∞ に発散することは現実の物質ではあり得ないので、クラック先端に塑性域が生じるはず。上の式では、この領域が十分に小さいときのみ成立する。

ひずみエネルギー

弾性体内に蓄えられるひずみエネルギーを理解したい。バネで考えると仕事量は



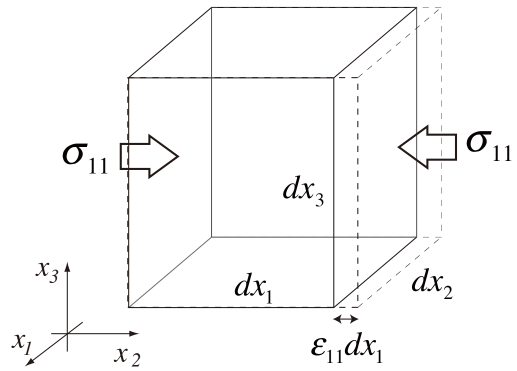
$$W = \int_0^{u_0} F\,du = \frac{1}{2} F_0 u_0$$

これがひずみエネルギーと一致する。

次に、微小立方体で考える。面倒なので、応力は、σ_{11}のみを作用させる。微小変形になされた仕事は、

面積　　変位量

$$dW = \sigma_{11} \times (dx_2 dx_3) \times (d\varepsilon_{11} dx_1)$$
$$= \sigma_{11} d\varepsilon_{11} (dx_1 dx_2 dx_3) = dU$$



単位体積当たりにして、歪みについて０から ε_{11} まで積分をすると

$$W_0 = \frac{1}{2} \sigma_{11} \varepsilon_{11} = U_0$$

同様にして、全成分について考え、積算すると、総和規約を使って、

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$$

となる。ちなみに、ひずみエネルギーを応力のみ、歪みのみで書き下すことによって、

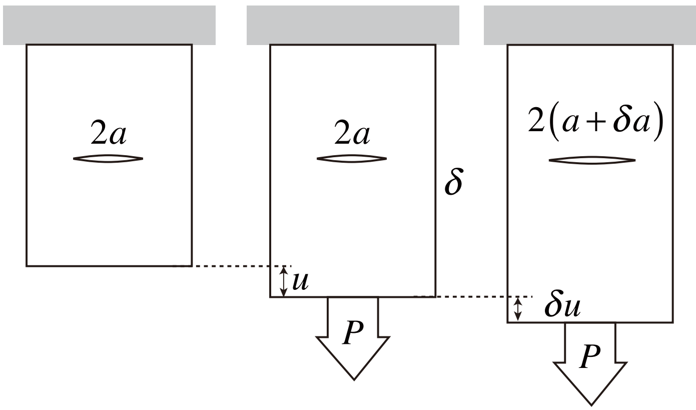
$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial \sigma_{ij}}$$

が成立することを確認できる。

線形破壊力学３

クラックの静的な成長

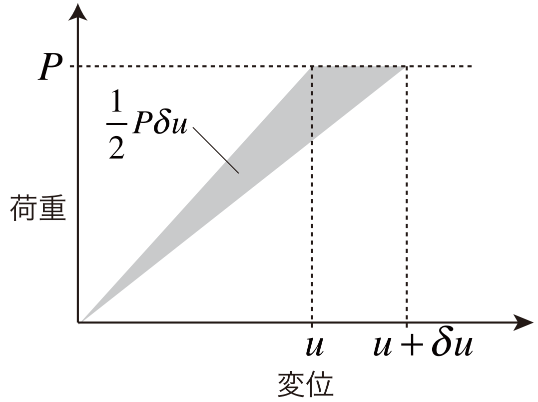
死加重 P が作用しており、クラックが $2\delta a$ だけ進展して、加重点が δu だけ下がった場合の、エネルギーの変化を考える。



作用点が変わったことによるポテンシャルエネルギーの変化は、

$$\delta\Omega = -P\delta u$$

変形したしたことによる歪みエネルギーの変化はグラフより、



$$\delta U = \frac{1}{2}P\delta u$$

よって変化量は、 $\delta\Pi = \delta\Omega + \delta U = -\frac{1}{2}P\delta u$

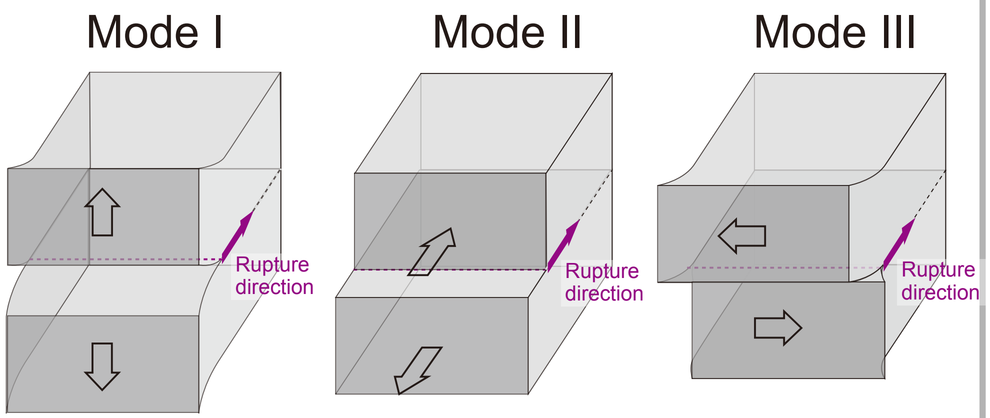
よって、単位長さのクラックの成長によって解放されるエネルギー（エネルギー解放率）は、弾性応答解析から得られる。
天下り的だが Irwinに従って、

$$\Gamma_I = -\frac{\partial\Pi}{\partial(2a)} = \frac{1-\nu}{2\mu}K_I^2$$

Γ が材料固有の値 G_c （破壊表面エネルギー）を超える
または、K が K_c（臨界応力拡大係数） を超える　→　クラックが成長する

クラックのモード＆エネルギー解放率

クラック先端を２次元問題で考えると、
３つのモードに分類できる。



In-plane | Anti-plane

３次元の断層すべりは、モードIIとIIIの組み合わせとなる。
モードIIはP波とSV波を考える必要が
モードIIIはSH波のみを考えればよい

エネルギー解放率と応力拡大係数は、

$$\Gamma_I = \frac{1-\nu}{2\mu} K_I^2, \qquad K_I = \sigma_{yy}^{\infty} \sqrt{\pi a}$$

$$\Gamma_{II} = \frac{1-\nu}{2\mu} K_{II}^2, \qquad K_{II} = \sigma_{yx}^{\infty} \sqrt{\pi a}$$

$$\Gamma_{III} = \frac{1}{2\mu} K_{III}^2, \qquad K_{III} = \sigma_{yz}^{\infty} \sqrt{\pi a}$$

とかける。重要なのは、
クラックサイズ増加
= エネルギー解放率＆応力拡大係数の増加
Gc がスケール依存（$\propto a$）でもしない限り、
破壊が停止にしくい。

動的な破壊の進展については、参② (p184 ~ 190)

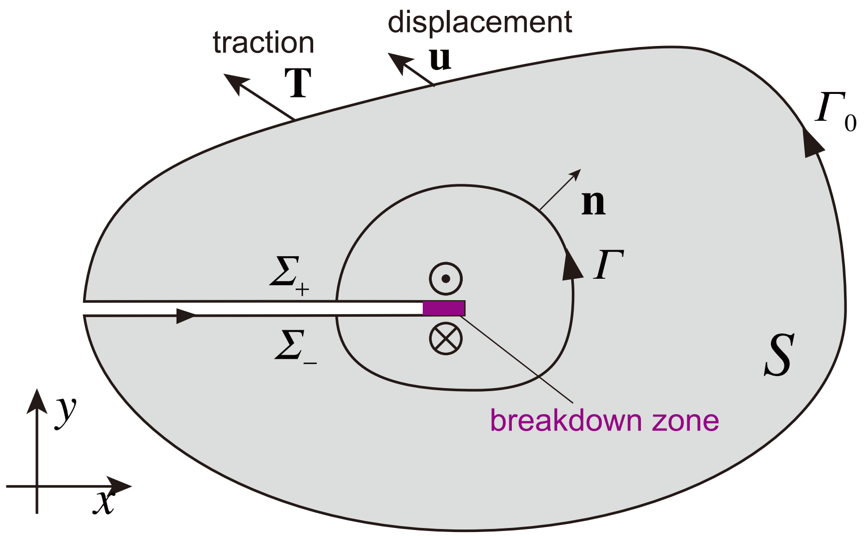
問題：自発的に破壊が成長する臨界サイズを G_c の関数として求めてみよ。

凝着力 and/or 塑性変形 1

J-積分1（強着力とGc）

J. Rice (1968)

先の議論では、クラック先端では応力が発散するモデルになっている。
これを防ぐには、クラック先端に凝着力が作用していると考えれば良い。
この凝着力は、静的ー動的摩擦への中途半端な摩擦力の変化（断層の構成則）で表現できる。



$$\Gamma_c = \Sigma_- + \Sigma_+$$

図のような物体のポテンシャルエネルギーは

歪みエネルギー密度の積分

$$U \equiv E - W = \int_S \varepsilon\, dS \quad - \quad \int_{\Gamma_0} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}\, d\Gamma$$

外部荷重の仕事

クラックが x 方向に単位長さ発達するときのエネルギーの変化（エネルギー解放率）は、ガウスの法則を使うと

$$G = \int_{\Gamma_0} \left(n_x \varepsilon - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \right) d\Gamma$$

この値が、積分経路で変化しない（Rice）
クラックを挟む領域の極限は、クラック中の変位を w とすると、

$$J(\Gamma_c) = -\int_\Sigma \left(\tau \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx$$

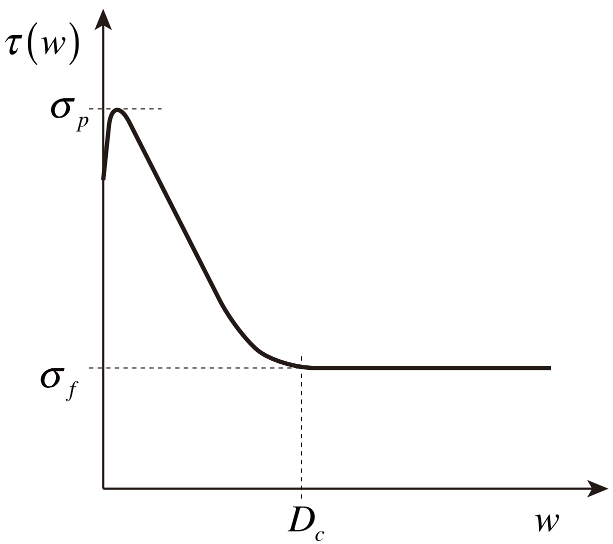
凝着力 and/or 塑性変形２

J-積分2（凝着力とGc）

せん断応力は変位のみの変数で、BZ以外のせん断応力を０、かつ、動的摩擦応力が0の場合（J. Riceは開口クラックを想定していた）は、

$$J\left(\Gamma_c\right)=\int_0^{D_c}\tau\left(w\right)dw$$

つまりこれが、エネルギー解放率になる。



まとめると、

$$G\equiv J\left(\Gamma_0\right)\equiv J\left(\Gamma_c\right)=\int_0^{D_c}\tau\left(w\right)dw\equiv G_c$$

構成則が成立すれば、グリフィスの破壊規準が自動的に満たされることになる。

実際の現象では、構成則＋周辺の非弾性変形がGcを定めているはず。
周辺の非弾性変形等は、構成則に押し付ける事ができる。このときは、Dcはスケール依存する（Andrew, 2005）。

純粋な構成則のDcが断層面のトポグラフィーのフラクタル的な性質でスケール依存するという考えもありこちらの方が自然か？

凝着力 and/or 塑性変形３

地震学における G_c や D_c の実体は何か？
現時点で、定説は存在しない。

観測事実：

G_c と D_c 共に、スケール依存する。

トータルのすべり量 $D_{\max}$ との関係

（Mikumo, Olsen, Fukuyama & Yagi, 2003)

理論的な結果：

クラックの成長に伴い、広範囲に波動エネルギーが供給されるのだから、Process zoneは増加する（Andrew, 2005）
結果として、Gcは、クラック長に比例する。

エネルギー解放率は、クラック長に比例するので、規模が大きくなるほど、そう簡単に破壊は停止できないが、実際は停止している。

この問題は、Gcがクラック長に比例することで解決できる。

断層の摩擦則 1

速度・状態依存摩擦（RSF）

実験室で得られた摩擦の構成則で、断層運動の多様性（定常すべり・ゆっくりすべり・地震時すべり）や地震サイクル、余震の大森公式を表現する事ができる。

中谷・永田（2009）を基にする。

構成則

すべり速度 V を変える と、せん断応力 τ が同じセンスで変化する（Dieterich, 1979）。

$$V(\tau) = V_* \exp\left(\frac{\tau - \Phi}{A}\right)$$

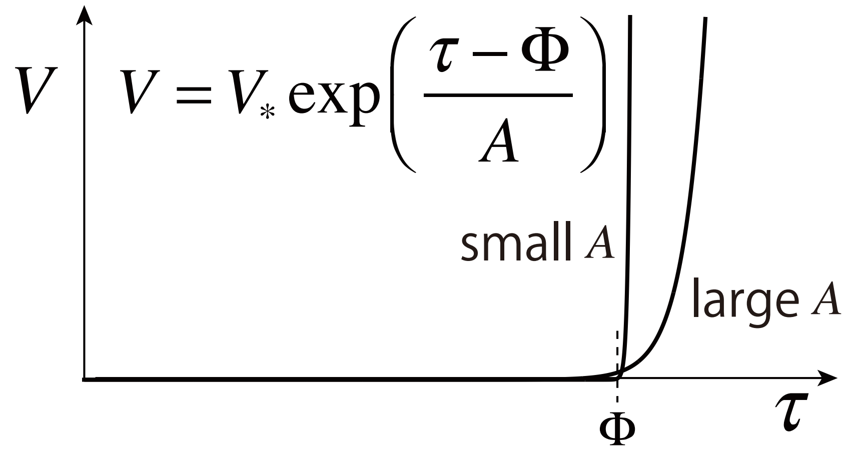
A：定数

Φ：強度

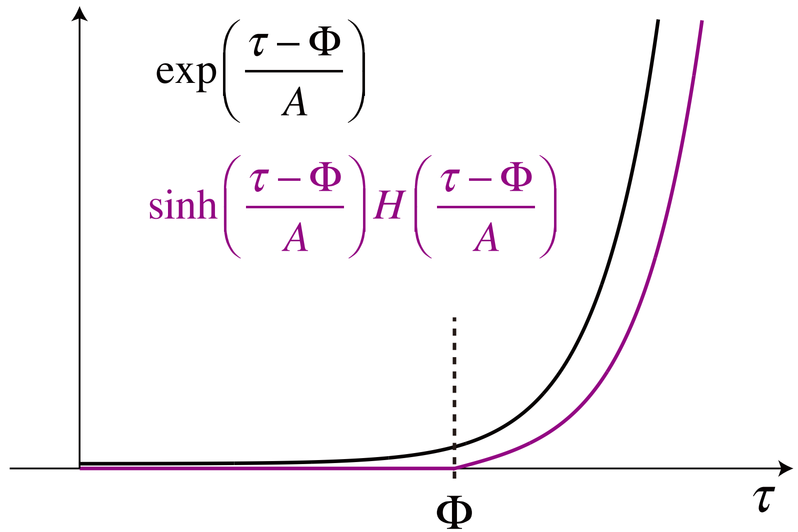
せん断応力の形で書けば、

$$\tau = \Phi + A \ln(V/V_*)$$

となる。 A が十分に小さいとき、古典的な摩擦則とほぼ同等になる。



せん断応力ゼロでも速度がゼロにならないのはおかしい。本当はexp→sinhで表現する。



強度 Φ が定まれば、V と τ の関係は一意に定まる。では、Φ の時間発展はどうなるか？

断層の摩擦則２

強度則（発展則）

実験によって、３つの性質が分かっていた。
時間とともに強度が回復する
（logtヒーリング）

$$\Phi(t) = \Phi_* + B\ln\left(t/t_c + 1\right), \quad \text{for} \ \ V = 0$$

静ー動摩擦移行にはある距離すべる必要あり

$$\Phi(x) = \left(\Phi_s - \Phi_d\right)\exp\left(-x/d_c\right) + \Phi_d$$

速度 V での定常状態の強度は、速度の対数に負の依存性を持つ

$$\Phi_{ss}\left(V\right) = \Phi_* - B\ln\left(V/V_c + 1\right), \quad \text{for} \ \ V > 0$$

３つの性質を再現する発展則は、微分形でまとめられている。Dieterich の Aging law (Beeler et al., 1994)と呼ばれる代表的な発展則は、

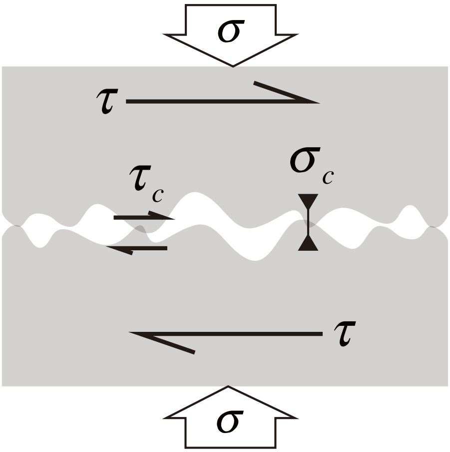
$$d\Phi = \frac{B}{d_c/V_*}\exp\left(-\frac{\Phi}{B}\right)dt - \frac{B}{d_c}dx$$

とかける。

断層の摩擦則３

凝着摩擦説

面と面が接触しているのはごく一部、巨視的な強度は接触点の物性のみで決まる。



A 接触面積

Ar 真の接触面積

$$R_c = Ar/A \ll 1$$

真の接触面に作用するせん断応力は、

$$\tau_c = \tau R_c^{-1}$$

これが物質固有の値 s を超えたときに破壊する。巨視的な強度は、面積分なので、

$$\Phi = sR_c$$

よって巨視的な強度は接触面の変化に依存

接触面積は、巨視的な法線応力 σ と、材料の硬さ指標 p（~数GPa）によって定まる。

$$R_c = \sigma/p$$

σ が大きくなったとき、弾塑性変形が接触点で発生する。よって、

$$\Phi = \frac{s}{p}\sigma \quad (= \mu\sigma)$$

クーロン摩擦則が出てきて、摩擦係数は、せん断強度と硬さ（~貫入硬度）で定まることになる。