地震活動

G-R則について

ETASモデルについて

参考文献：

- 宇津徳治, 地震学, 共立出版
- Scholz, 1968, The frequency-magnitude relation of microfracturing in rock and its relation to earthquakes, BSSA, 58, 399-415.
- Ogata, 1988, Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes, JASA, 83, 9-27.

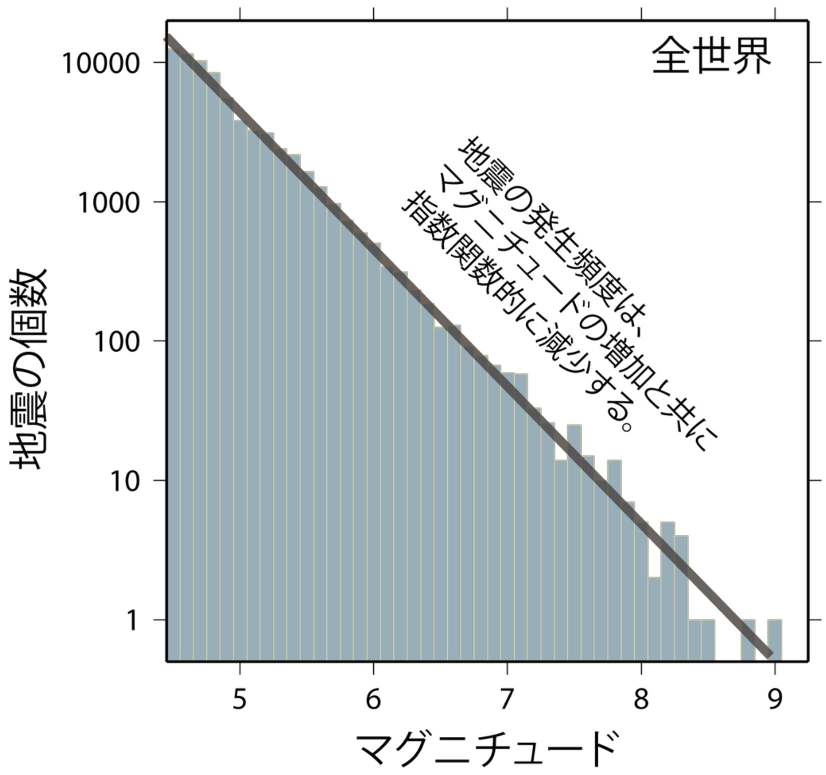
地震活動

G-R則

図書館で見つかった法則？

地震の規模（M）と発生頻度（n）の関係

$$\log_{10} N(M) = a - bM$$



gCMTカタログデータを使用

このようなべき乗則は山火事・株価等でも観測されている。

地震は臨界状態の場で発生している？
Or
強度分布がフラクタルだから？

G-R則を断層面積で

G-R則は、$logn(M) = a - bM$

ここで、モーメントマグニチュードは、

$$M_W = \frac{logM_0}{1.5} + C$$

よって、G-R則は、

$$logn(M_0) = a - b\left(\frac{logM_0}{1.5} + C\right)$$

$$\therefore n(M_0) = 10^{a-bC} M_0^{-\frac{b}{1.5}}$$

地震モーメントは、ストレスドロップ $\Delta\sigma$ を用いると

$$M_0 = \mu A\overline{D} = \frac{\Delta\sigma}{K} A^{1.5}$$

したがって、G-R則は、

$$n(A) = 10^{a-bC}\left(\frac{\Delta\sigma}{K}\right) A^{-b}$$

ストレスドロップが一定であると仮定すると、

$$n(A) \propto A^{-b}$$

地震活動

G-R則の意味するところ

破壊領域の面積が A で、その後 dA ほど破壊が進行する間に停止する確率が、面積に反比例すると仮定する。
つまり、停止確率を

$$b'\frac{dA}{A}$$

面積に対する頻度分布を $n(A)$ とし、累積頻度分布を下記のように定義する。

$$N(A) = \int_A^\infty n(A')dA'$$

この関数は 面積 A からA+dAまで成長した時の停止確率を含んでいる。つまり、この関数から停止する確率は、

$$\frac{N(A) - N(A+dA)}{N(A)} = -\frac{dN(A)}{N(A)}$$

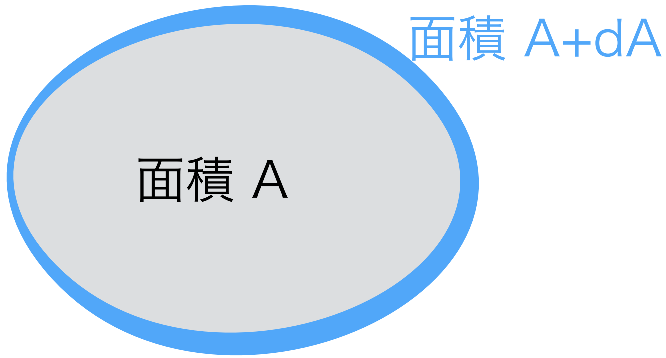
仮定した停止確率と組み合わせると、

$$b'\frac{dA}{A} = -\frac{dN(A)}{N(A)}$$

この微分方程式をとけば良い。

$$lnA^{-b} = ln\left(N(A)\right) + C$$
$$\therefore N(A) \propto A^{-b}$$

G-R則と一定する。



地震活動

b値を最尤法で推定

G-R則は、 $logn(M) = a - bM$

カットオフマグニチュードを持つある地震群が下記のベクトルで与えられるとする。

$$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \ldots\ldots, m_K)$$

カットオフマグニチュードが存在することに留意すると、G-R則は

$$n(M) = N(M_c)10^{-b(M-M_c)} = N(M_c)e^{ln10^{-b(M-M_c)}}$$

とかける。ここで、 $\beta = bln10$ とおくと

$$n(M) = N(M_c)e^{-\beta(M-M_c)}$$

ここで、βが与えられた時にマグニチュード m_k が発生する条件付き確率は、

$$p(m_k|\beta) = \beta e^{-\beta(m_k-M_c)}$$

条件付き確率は、βの尤もらしさである尤度で書き換えられる。つまり、

$$l(\beta|m_k) = p(m_k|\beta) = \beta e^{-\beta(m_k-M_c)}$$

与えられた地震群での尤度は、

$$L(\beta|\mathbf{m}) = \prod_{k=1}^{K} l(\beta|m_k) = \beta^K e^{-\beta\sum_{k=1}^{K}(m_k-M_c)}$$

この関数を最大化するのは、$L_\beta = 0$

したがって、

$$\beta = \frac{1}{\overline{m} - M_c}$$

$$b = \frac{\beta}{ln10} = \frac{1}{ln10(\overline{m} - M_c)} = \frac{loge}{\overline{m} - M_c}$$

地震活動

ETASモデル

大森公式：本震後の地震の発生割合は、時間の逆数に比例する。

$$N(t) = \frac{K}{t - c}$$

余震の減衰に関する指標 p を導入した改良大森公式は、

$$N(t) = \frac{K}{(t - c)^p}$$

全ての地震が余震を持つと仮定して、大森公式を使って地震活動をモデル化するのが、ETASモデル。ある時刻の地震発生率をλと置くと、

$$\lambda(t \,|\, \boldsymbol{\theta}) = \mu + \sum_{i;t_i<t} \frac{Ke^{\alpha(M_i - M_0)}}{(t - t_i + c)^p}$$

$$\boldsymbol{\theta} = (\mu, \alpha, K, c, p)$$

これは非一様ポアソン過程で、一様ポアソン過程で単位時間幅が変化する場合と考えれば良い。したがって、i番目の地震が時刻t1に発生する確率は、

$$p(t_i \,|\, t_{i-1}; \boldsymbol{\theta}) = \lambda(t_i \,|\, \boldsymbol{\theta}) exp \left[- \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(t \,|\, \boldsymbol{\theta}) dt \right]$$

よって尤度は、

$$L(\boldsymbol{\theta} \,|\, \mathbf{t}, \mathbf{m}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i \,|\, \boldsymbol{\theta}) exp \left[- \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(t \,|\, \boldsymbol{\theta}) dt \right]$$

震源時　$\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots\ldots t_n)$

マグニチュード　$\mathbf{m} = (M_1, M_2, \ldots\ldots M_n)$

扱いやすい対数尤度にすると、

$$logL(\boldsymbol{\theta} \,|\, \mathbf{t}, \mathbf{m}) = \sum_{i=1}^{n} log\lambda(t_i \,|\, \boldsymbol{\theta}) - \int_0^T \lambda(t \,|\, \boldsymbol{\theta}) dt$$

これを最大化するモデル値を数値計算で求めれば良い