

## 1.2 震源モデル（5）

### 変位場を理解する

ナビエの式から地震による揺れと地殻変動を求めてみる。

### 断層運動による波動（遠地実体波の場合）

遠地実体波が、様々な効果の線形結合で表現できることを理解する。

### 断層運動に関する応力・スケーリング則

断層が解放する応力（応力降下）はほぼ一定であり、そこから導かれるスケーリング則を理解する。

### 参考文献：

- ① Aki & Richards, Quantitative Seismology
- ② 松浦, 地球連続体力学（5章）, 岩波講座地球惑星科学

## 1.2 震源モデル

### 変形場を理解する その1

運動方程式（平衡方程式＋慣性項）：

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} + f_i$$

歪の定義式： $\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k})$

構成則： $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$

等方弾性体の弾性定数：

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$



ナビエの式

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$$

この式を解けば良い

## 1.2 震源モデル

# 変形場を理解する その2

弾性体の基礎方程式は、

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \mathbf{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$$

ここで、原点に シングルフォース (SF)  
 $\mathbf{a}(1,0,0)$  の力が作用した場合を考える

$$\mathbf{f} = F(t) \delta(\mathbf{x}) \mathbf{a} = \nabla^2 \mathbf{w}$$

と書ける。よって、

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{w} &= -\frac{F(t)}{4\pi} \nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \mathbf{a} \\ \therefore \mathbf{w} &= -\frac{F(t)}{4\pi |\mathbf{x}|} \mathbf{a} \end{aligned}$$

グリーンの定理を使うとデルタ関数の表現の幅が広がる。デルタ関数は

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi} \nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right)$$

と書ける。

なんちゃって証) 原点を以て、 $\mathbf{x}$  を含む球空間  $V$  を考える。

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{-1}{4\pi} \nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) dV &= \frac{-1}{4\pi} \iint_S \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \frac{-1}{4\pi} \iint_{\theta, \vartheta} \mathbf{n} \cdot \nabla \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \times |\mathbf{x}|^2 \sin \theta d\theta d\vartheta \\ &= -\frac{1}{4\pi} \times 4\pi \times \mathbf{n} \cdot \left( \frac{-x_1}{|\mathbf{x}|^3}, \frac{-x_2}{|\mathbf{x}|^3}, \frac{-x_3}{|\mathbf{x}|^3} \right) \times |\mathbf{x}|^2 \\ &= \mathbf{n} \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = 1 \end{aligned}$$

ベクトル  $\mathbf{x}$  は、原点から伸びてゐることに注意

## 1.2 震源モデル

# 変形場を理解する その3

$$\mathbf{w} = -\frac{F(t)}{4\pi|\mathbf{x}|}\mathbf{a}$$

なので、

$$\nabla\mathbf{w} = -\frac{F(t)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) = \Psi$$

$$\nabla\times\mathbf{w} = \frac{F(t)}{4\pi}\left(0, \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{1}{|\mathbf{x}|}, -\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) = \Omega$$

任意のベクトルが、スカラーポテンシャルの勾配とベクトルポテンシャルの回転で表記される。ここでは、

$$\mathbf{f} = \nabla^2\mathbf{w} = \nabla\Psi + \nabla\times\Omega$$

となる。

変位ベクトルもベクトルは、スカラーポテンシャルの勾配と、ベクトルポテンシャルの回転で表現できるので、

$$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla\times\psi$$

と書ける。uの自由度は3なのに、4つの自由度が存在してしまうので、付帯条件

$$\nabla\cdot\psi = 0$$

がつく。

fとuをナビエに代入すると、

$$\begin{aligned}\rho(\nabla\ddot{\phi} + \nabla\times\ddot{\psi}) &= \nabla\Psi + \nabla\times\Omega \\ &+ (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla\cdot\nabla\phi) - \mu\nabla\times\nabla\times\nabla\times\psi\end{aligned}$$

ここで、 $\nabla\times\nabla\phi = 0$ ,  $\nabla\cdot\nabla\times\psi = 0$

を使っていますよ。傾斜に回転成分ないし、回転成分に発散はない。

## 1.2 震源モデル

# 変形場を理解する その4

回転と傾斜は関係ないので、  
回転抜きの変位を集めると、

$$\begin{aligned}\rho \nabla \ddot{\phi} &= \nabla \Psi + (\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \nabla \phi) \\ \therefore \ddot{\phi} &= \frac{\Psi}{\rho} + \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \phi\end{aligned}$$

となりP波の波動方程式が得られる。  
次に回転の項を集めると、

$$\begin{aligned}\rho \nabla \times \ddot{\psi} &= \nabla \times \Omega - \mu \nabla \times \nabla \times \nabla \times \psi \\ \nabla \times \nabla \times \psi &= \nabla (\nabla \cdot \psi) - \nabla^2 \psi = -\nabla^2 \psi \\ \therefore \ddot{\psi} &= \frac{\Omega}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \psi\end{aligned}$$

となりS波の波動方程式が得られる。

この非同次波動方程式の解は、

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\alpha^2\rho} \iiint_v \frac{\Psi(\xi, t-\tau)}{|\mathbf{x}-\xi|} dV \\ \psi &= \frac{1}{4\pi\alpha^2\rho} \iiint_v \frac{\Omega(\xi, t-\tau)}{|\mathbf{x}-\xi|} dV\end{aligned}$$

となることが知られている。

SFの力のポテンシャルを代入 →

変位のポテンシャル →

変位 (SFのグリーン関数) →

表現定理の式に代入 →

DC成分に対する、実体波の波形

詳しくは、Aki & Richardsを参照

## 1.2 震源モデル

### 変形場を理解する その5

最終的に下記のような式が導かれる。

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{3(5\gamma_i\gamma_p\gamma_q - l_{ipq})}{4\pi\rho r^4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M_{pq}(t - \tau) d\tau \quad \text{近地項}$$

$$+ \frac{4\gamma_i\gamma_p\gamma_q - l_{ipq}}{4\pi\rho\alpha^2 r^2} M_{pq}(t) - \frac{6\gamma_i\gamma_p\gamma_q - l_{ipq} - \gamma_q\delta_{ip}}{4\pi\rho\beta^2 r^2} M_{pq}(t) \quad \text{中間項}$$

$$+ \frac{\gamma_i\gamma_p\gamma_q}{4\pi\rho\alpha^3 r} \dot{M}_{pq}(t) - \frac{(\gamma_i\gamma_p - \delta_{ip})\gamma_q}{4\pi\rho\beta^3 r} \dot{M}_{pq}(t) \quad \text{遠地項}$$

$$\gamma_i = \frac{(x_i - \xi_i)}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} \quad \text{方向余弦}$$

$$l_{ipq} = \gamma_i\delta_{pq} + \gamma_p\delta_{iq} + \gamma_q\delta_{ip}$$

わりと簡単にプログラム化できそうなので、計算してみる。

## 1.2 震源モデル

### 変形場を理解する その6

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \frac{R_{ipq}^N}{4\pi\rho r^4} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau M_{pq}(t - \tau) d\tau$$

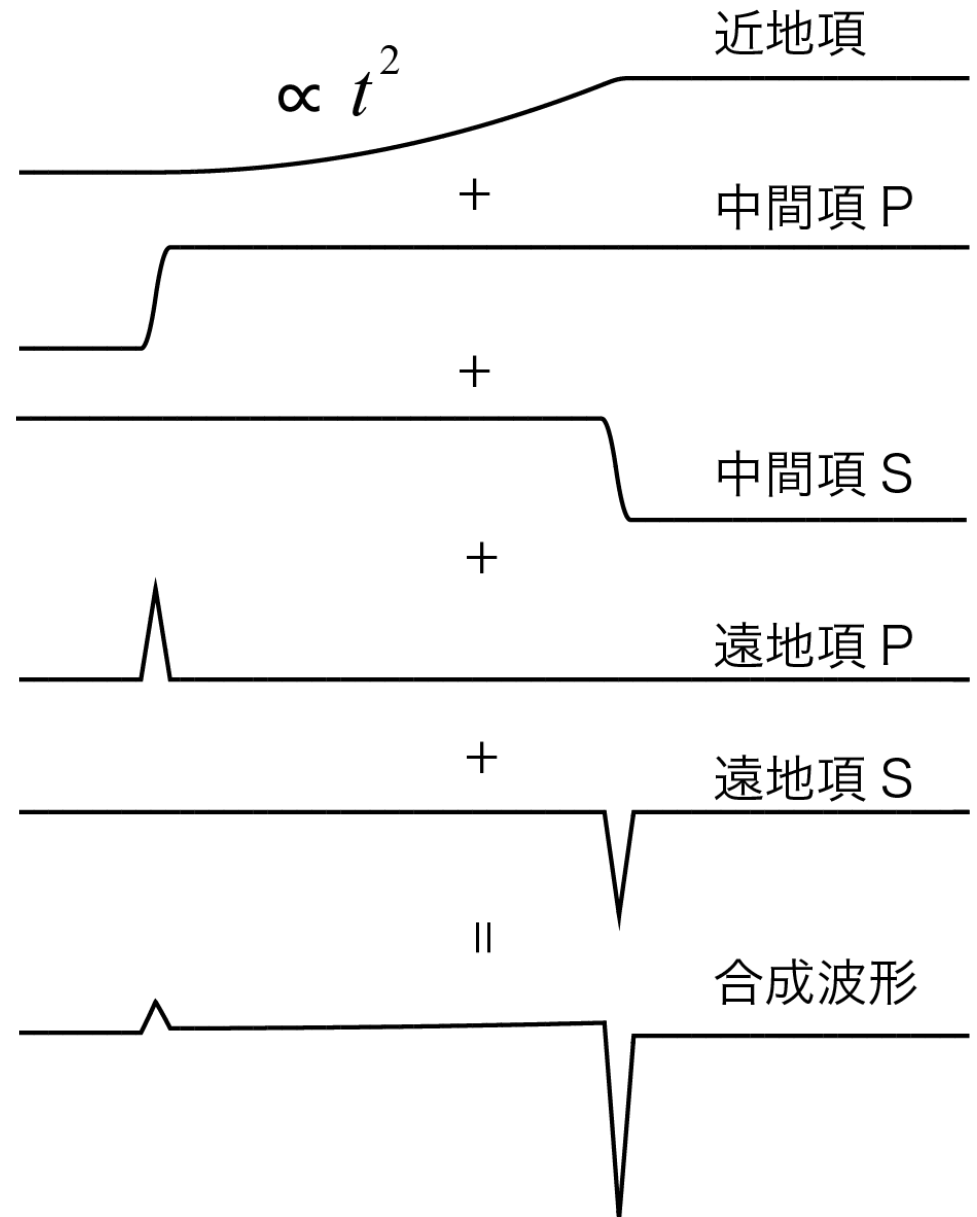
$$+ \frac{R_{ipq}^{IP}}{4\pi\rho\alpha^2 r^2} M_{pq}(t)$$

$$- \frac{R_{ipq}^{IS}}{4\pi\rho\beta^2 r^2} M_{pq}(t)$$

$$+ \frac{R_{ipq}^{FP}}{4\pi\rho\alpha^3 r} \dot{M}_{pq}(t)$$

$$- \frac{R_{ipq}^{FS}}{4\pi\rho\beta^3 r} \dot{M}_{pq}(t)$$

近地項と中間項は、静的な変位をもたらす。この式で時間を $\infty$ に持っていけば、静的な変位場を得ることができる。近地項は思ったほど距離減衰しなく、実際は、距離の2乗の減衰となる。



## 1.2 震源モデル

### 断層運動による波動（遠地実体波の場合） その1

観測される地震動は、

震源近傍の地盤応答

観測点近傍の地盤応答

波線の湾曲の効果

非弾性の効果 (Q)

地震計の応答関数

の影響が含まれている。

これらはコンボリューションで結合される。

$$Uc(t, r, \gamma) = \frac{Rc(\gamma)}{4\pi\rho c^3} \left( \frac{1}{r} \right)_e Sc(t, \gamma) * R^s(t) * Q(t) * R^o(t) * I(t)$$

地震動

波線の湾曲の効果

震源近傍の地盤応答

非弾性の効果

観測点近傍の地盤応答

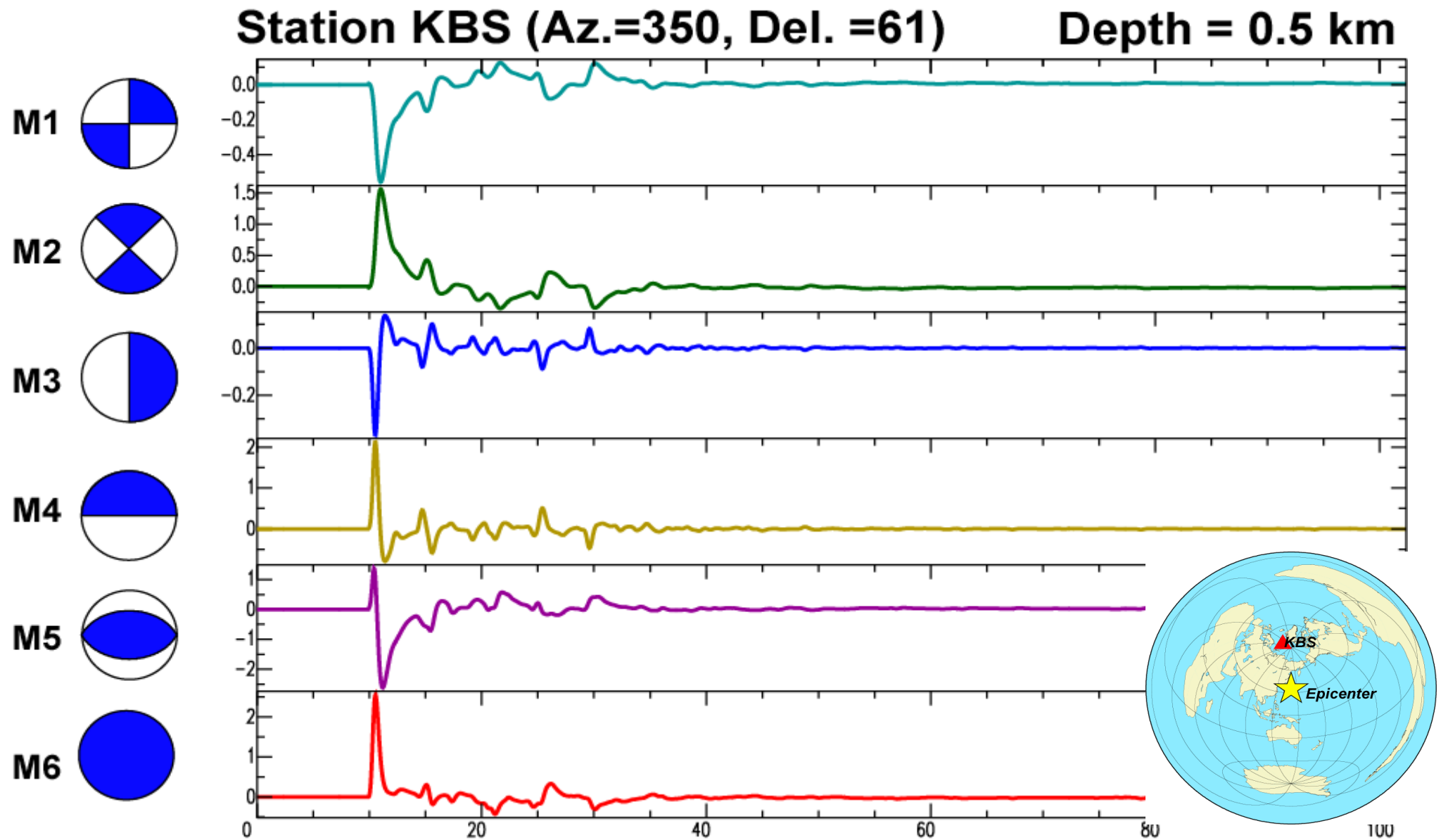
地震計の特性



## 1.2 震源モデル

### 断層運動による波動（遠地実体波の場合） その3

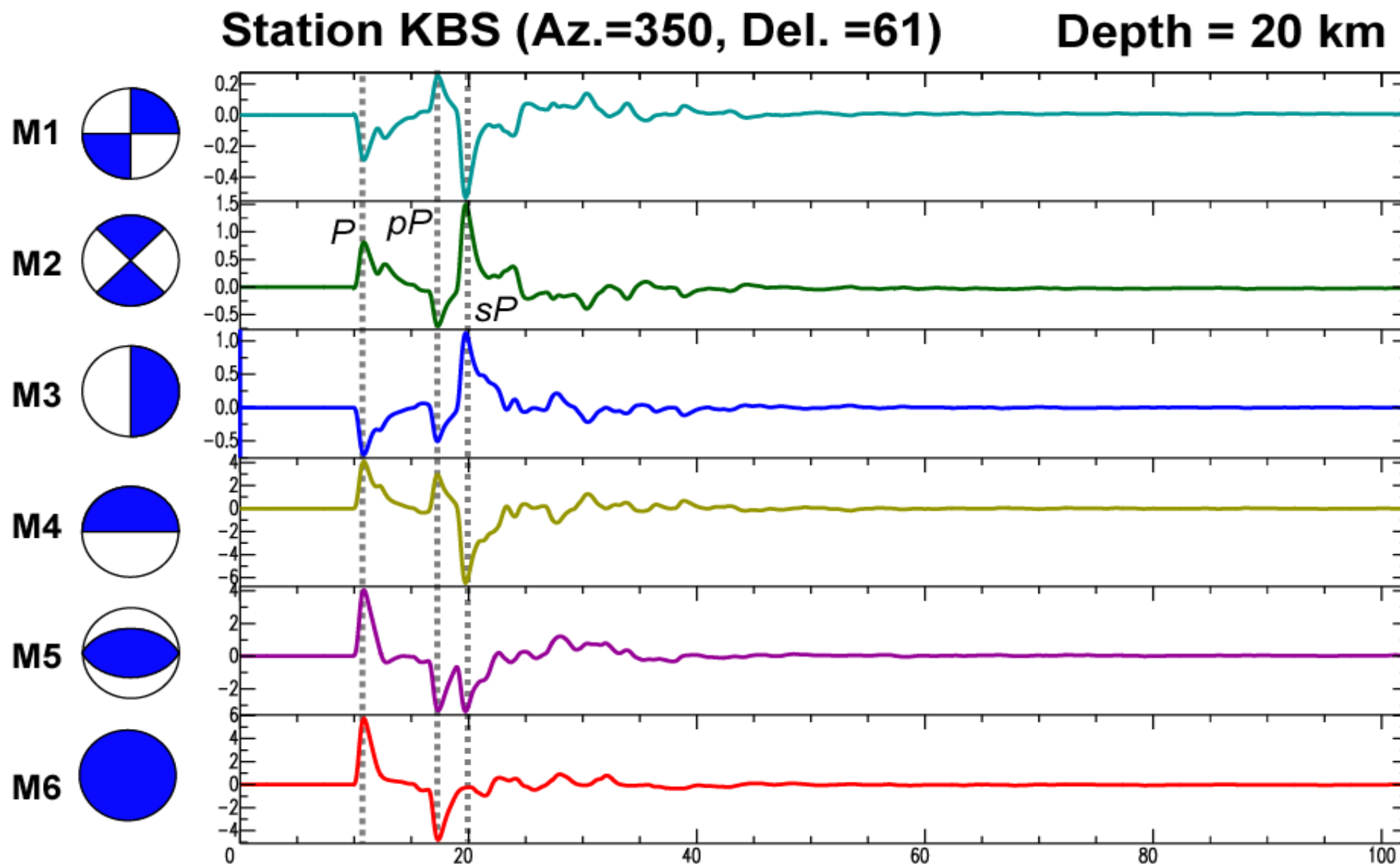
要素モーメントテンソルと地震波形



## 1.2 震源モデル

### 断層運動による波動（遠地実体波の場合） その5

要素モーメントテンソルと地震波形



## 1.2 震源モデル

### 断層運動に関係した応力

応力降下量（ストレンドロップ）

地震によって解放した応力の量  
（ここでは平均値）

応力変化 → 断層のすべりを断層の長さで割って、バネ係数のようなもののかけたもの

$$\Delta\sigma \sim 2\mu D/L = 2M_0/SL \sim 2M_0/S^{1.5}$$

地震モーメントと断層の面積が求まれば  
算出

$$\Delta\sigma = C M_0/S^{1.5}$$

Cは断層の形状によって変化

### ストレンドロップ一定

驚くべきことに、ストレンドロップは地震によらずほぼ一定。



地球が蓄え得る歪み量はそれほど大きくない。

## 1.2 震源モデル

### 断層モデルのスケーリング

自己相似則  $L \propto W \propto D$

断層の長さ、幅、すべり量は比例関係にある。破壊速度が一定の場合、

$$L = v_r T$$

よって、地震モーメントは、

$$M_0 = \mu L W D \propto T^3$$

ただし、 $W$ は有限、よって $W$ が制限されると。

$$M_0 \propto T^2$$

# 1.2 震源モデル

## 地震スペクトル

オメガ2乗モデル (Aki 1967)

$$\hat{M}_0(\omega) = \frac{M_0(\infty)}{1 + (\omega/\omega_c)^2}$$

コーナー周期は、スケーリング則から、

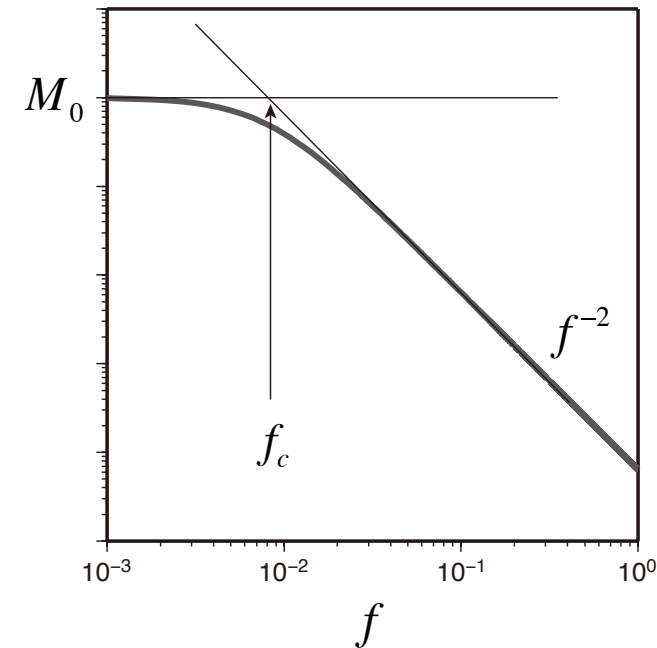
$$\omega_c \propto T^{-1} \propto M_0^{-1/3}$$

となる。

$$f \ll f_c \text{ の時は } \hat{M}_0(f) \approx M_0(\infty)$$

よって、ある周波数の振幅から地震モーメントに関するマグニチュードを決定できる。

**レポート**：マグニチュード決定に使用した周波数  $f$  が、 $f > f_c$  のときに、得られた値をどのように解釈すべきか考察せよ。



ハスケルモデルの場合も  $\omega^{-2}$  となるが、断層の幅を考慮すると、 $\omega^{-3}$  となる。

## 1.2 震源モデル

### 断層運動に関係した応力

不均一な応力降下量

地震による歪みの変化から応力降下量分布を求めることができる。

応力降下とは逆に、応力負荷になる領域があり、これらの領域で大粒の余震が  
起こりやすいことが分かっている。余震を予測できる時代になりつつある。

