１.２　震源モデル（４）

表現定理
　表現定理で、グリーン関数やダブルカップルを理解する。
グリーン関数とその性質
　グリーン関数と、相反定理を理解する。
表現定理
　表面に作用する変位によって、地震動が計算できることを理解する。
等価体積力
　断層運動と等価な体積力は、なぜダブルカップルなのかを理解する。
地震モーメント
　地震モーメントは静的な変位に関係することを理解する。

参考文献：

① Aki & Richards, Quantitative Seismology
② 松浦，地球連続体力学（５章），岩波講座地球惑星科学

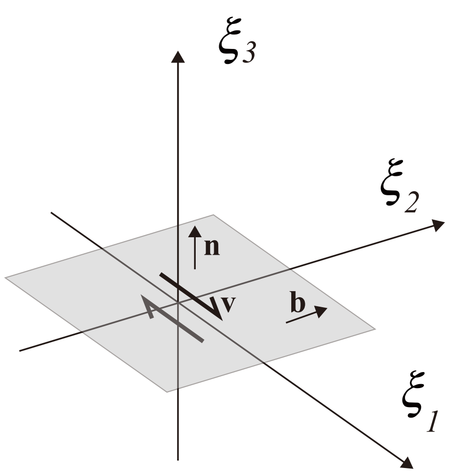
表現定理（representation theorem)

目的１　観測された地震波形を表現するために、震源の効果と地下を波が伝播する効果に分けて考えたい。

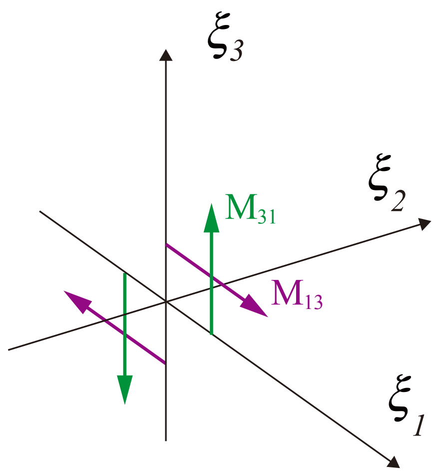
$$u_n(\mathbf{x},t)=\int_{\Sigma}\left[C_{ijkl}\Delta u_i(\boldsymbol{\xi},t)n_j\right] * G_{nk,l}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi},0)dS$$

地震波形　　　震源の効果　　　伝播の影響

目的２　天下り的に紹介された、モーメントテンソルと断層滑りの関係を理解したい。



=

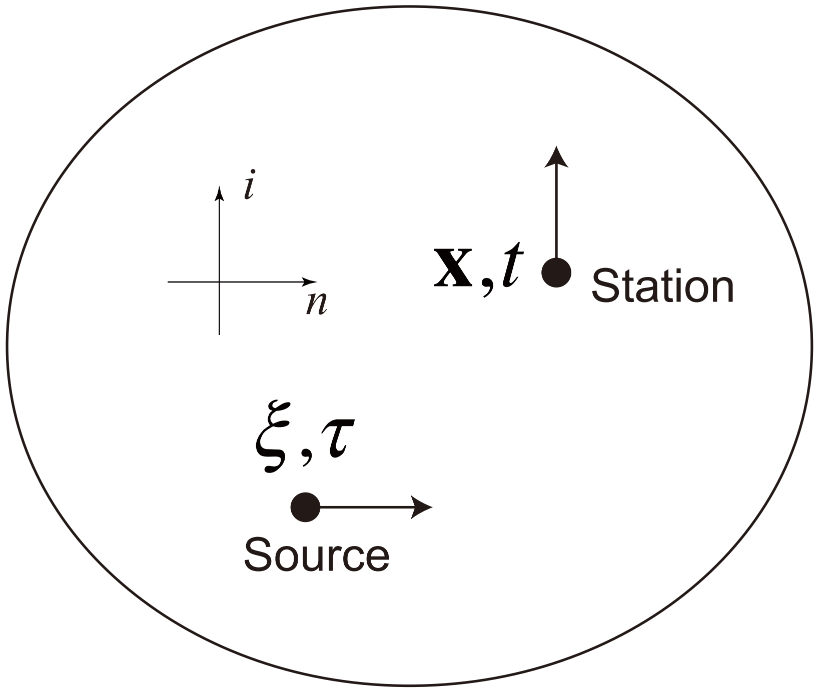


1.2 震源モデル

グリーン関数　$G_{in}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)$

弾性体のある点（震源 ξ ）に時刻 τ に働く n 成分方向の単位力（シングルフォース）によって生じる、観測点 $\mathbf{x}$ 時刻 t での i 成分方向の変位：

$$G_{in}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau)$$



グリーン関数の相反性

性質１　時間相反性を持つ。

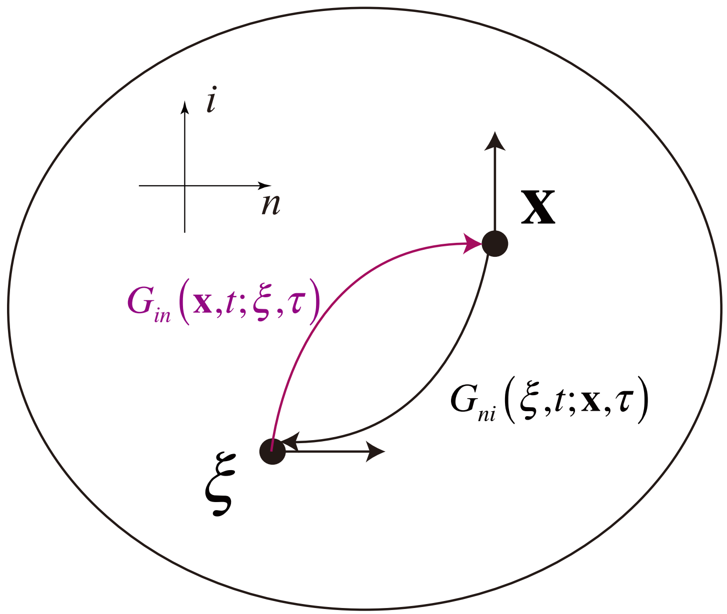
条件：境界条件不変かつ無限時間前に0

$$G_{in}\left(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau\right)=G_{in}\left(\mathbf{x},-t;\boldsymbol{\xi},-\tau\right)$$

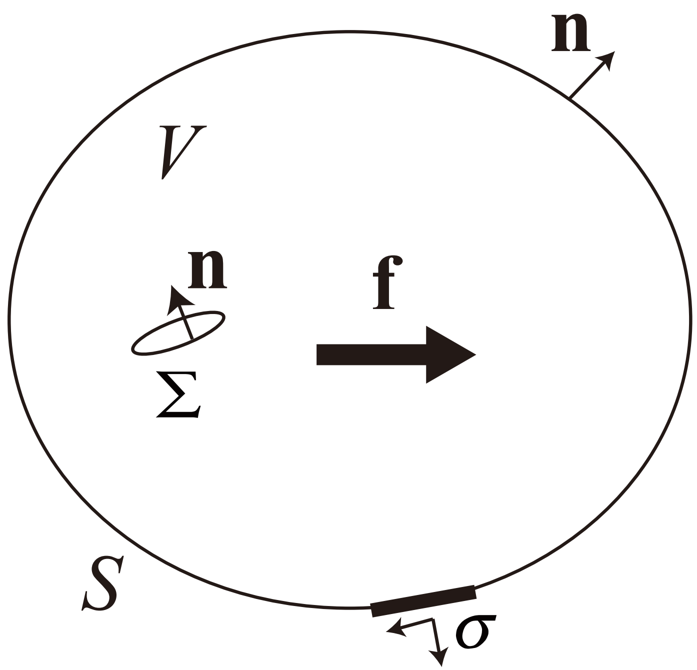
性質２　空間相反性を持つ。

条件：ある時刻以前に、変位・速度が0 かつ全境界で変位またはトラクションが0

$$G_{in}\left(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau\right)=G_{ni}\left(\boldsymbol{\xi},t;\mathbf{x},\tau\right)$$



表現定理



線形弾性体　体積 V,　表面 S を考える。

連続体の運動方程式は、

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j} + f_i$$

表現定理より変位は、

$$\begin{aligned}
u_n(\mathbf{x},t) &= \int_V f_i(\boldsymbol{\xi},t) * G_{in}(\boldsymbol{\xi},t;\mathbf{x},0)\,dV(\boldsymbol{\xi}) \\
&\quad + \int_{S+\Sigma} T_i(\boldsymbol{\xi},t) * G_{in}(\boldsymbol{\xi},t;\mathbf{x},0)\,dS(\boldsymbol{\xi}) \\
&\quad - \int_{S+\Sigma} \left[C_{ijkl} u_i(\boldsymbol{\xi},t) n_j(\xi)\right] * G_{kn,l}(\boldsymbol{\xi},t;\mathbf{x},0)\,dS(\boldsymbol{\xi}) \\
&= \int_V f_i(\boldsymbol{\xi},t) * G_{in}(\boldsymbol{\xi},t;\mathbf{x},0)\,dV(\boldsymbol{\xi}) \\
&\quad + \int_{S+\Sigma} \left[\sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi},t) n_j(\boldsymbol{\xi})\right] * G_{in}(\boldsymbol{\xi},t;\mathbf{x},0)\,dS(\boldsymbol{\xi}) \\
&\quad - \int_{S+\Sigma} \left[C_{ijkl} u_i(\boldsymbol{\xi},t) n_j(\xi)\right] * G_{kn,l}(\boldsymbol{\xi},t;\mathbf{x},0)\,dS(\boldsymbol{\xi})
\end{aligned}$$

1.2 震源モデル

コーシーの関係（復習）

応力ベクトル（T）

トラクションとも呼ばれ、ある微小面積に作用する単位面積あたりの力、応力との関係として、

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

が成立。この式をコーシーの関係とよぶ。

２次元の場合だと簡単に導ける。

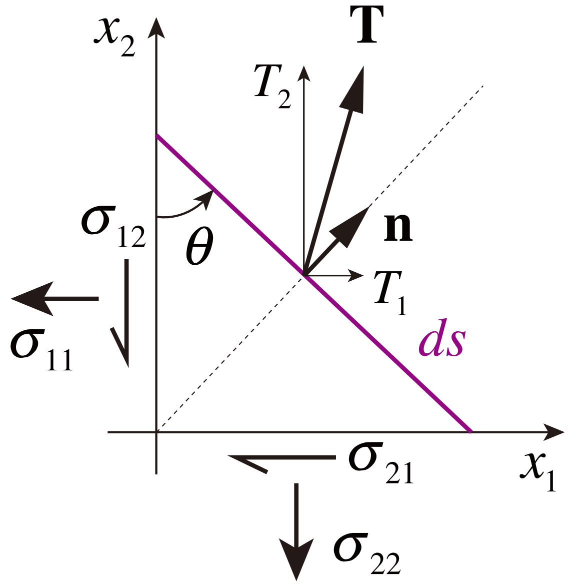
まずは x_1 軸方向の力の釣り合いから、

$$T_1 ds = \sigma_{11} dx_2 + \sigma_{21} dx_1$$
$$= \left(\sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2\right) ds$$
$$\therefore T_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{21} n_2$$

同様にして、

$$T_2 = \sigma_{12} n_1 + \sigma_{22} n_2$$

成立していることがわかる。



３次元問題でも面倒になるだけで、同じように下記の式が導ける（やってみよう）。

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

表現定理（続き）

空間相反性を利用すれば

$$
\begin{aligned}
u_n(\mathbf{x},t) = & \int_V f_i(\boldsymbol{\xi},t) * G_{ni}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi},0)\,dV(\boldsymbol{\xi}) \\
& + \int_{S+\Sigma} \left[\sigma_{ij}(\boldsymbol{\xi},t)\,n_j(\boldsymbol{\xi})\right] * G_{ni}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi},0)\,dS(\boldsymbol{\xi}) \\
& - \int_{S+\Sigma} \left[C_{ijkl}u_i(\boldsymbol{\xi},t)\,n_j(\boldsymbol{\xi})\right] * G_{nk,l}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi},0)\,dS(\boldsymbol{\xi})
\end{aligned}
$$

この式は、震源となるもの（体積力、面に働くトラクション、変位）から、任意の点の変位（変位場）を求める式となる。

表現定理（続き）

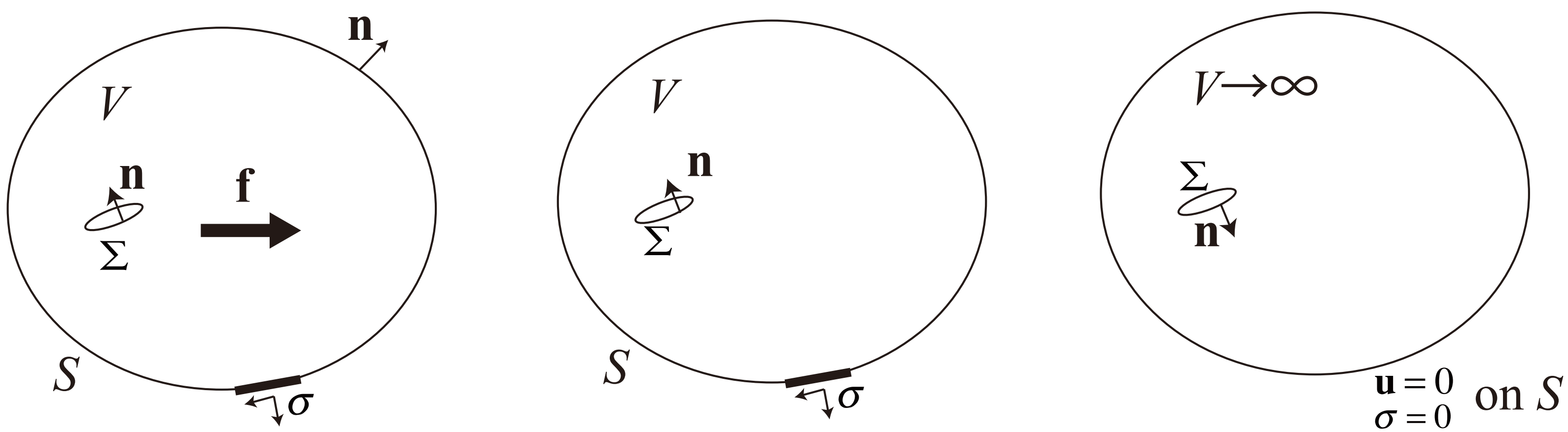
シンプルに書くと

$$u_n = \int_V f_i * G_{ni}\, dV + \int_{S+\Sigma} \sigma_{ij} n_j * G_{ni}\, dS - \int_{S+\Sigma} C_{ijkl} u_i n_j * G_{nk,l}\, dS$$

Body force　　Surface traction　　Surface displacement

まず、体積力を無視する。領域を十分に大きく取ると、表面Sでの変位とトラクションは0となるはずである。便宜的に、法線ベクトルをΣの内側に取ると、上の式は、

$$u_n = \int_\Sigma \sigma_{ij} n_j * G_{ni}\, dS + \int_\Sigma C_{ijkl} u_i n_j * G_{nk,l}\, dS$$



表現定理（続き）

$$u_n = \int_\Sigma \sigma_{ij} n_j * G_{ni}\, dS + \int_\Sigma C_{ijkl} u_i n_j * G_{nk,l}\, dS$$

第一項はトラクションの連続性を考えると0となるので、

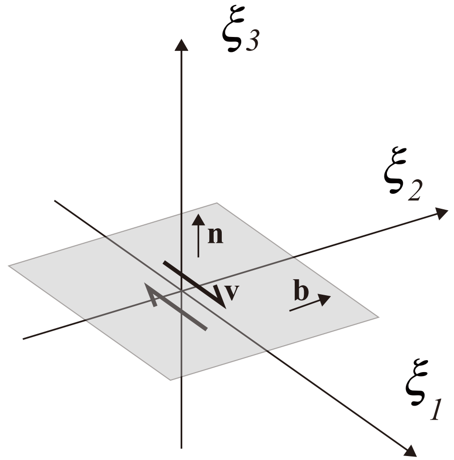
$$u_n = \int_\Sigma C_{ijkl} u_i n_j * G_{nk,l}\, dS$$

モーメントテンソルは、 $M_{kl} = \int_\Sigma C_{ijkl} u_i n_j\, dS$

対応するグリーン関数は $G_{nk,l}$

等価体積力

図のような断層面を考える。滑り分布が一定



$$\Delta\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi},t)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\Delta u(\boldsymbol{\xi},t),\qquad \mathbf{n}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$u_n(\mathbf{x},t)=\int_\Sigma\left\{C_{13kl}\Delta u(\boldsymbol{\xi},t)*G_{nk,l}\right\}dS$$

断層面上では、せん断応力のみになるので弾性係数は、

$$C_{13kl}=\mu(\delta_{1k}\delta_{3l}+\delta_{3k}\delta_{1l})$$

のみの考えれば良い。総和規約を思い出し、表現定理で得られた式に代入すると、

$$u_n(\mathbf{x},t)=\int_\Sigma\mu\Delta u(\xi,t)*\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_3}G_{n1}+\frac{\partial}{\partial\xi_1}G_{n3}\right\}dS$$

等価体積力（続き）

式で表現すると

$$G_{ni}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi},\tau) \simeq G_{ni}(\mathbf{x},t;\boldsymbol{\xi}_c,\tau)$$

$$S_c(t,\boldsymbol{\gamma}) = \int \mu\Delta u\left(\boldsymbol{\xi}, t - \boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\gamma}/c\right)dS$$

$$\simeq \int \mu\Delta u(\boldsymbol{\xi},t)\,dS = \mu\overline{\Delta u}(t)A$$

点震源を仮定、この仮定の本質は

１）断層面上のグリーン関数を断層面上のある点で代表させる

２）震源時間関数を、時間のみの関数で表現できる

よって、

$$u_n(\mathbf{x},t) = \mu\int_\Sigma \Delta u(\xi,t) * \left\{\frac{\partial}{\partial\xi_3}G_{n1} + \frac{\partial}{\partial\xi_1}G_{n3}\right\}dS$$

点震源仮定→

$$\simeq \mu\overline{\Delta u}(t)A * \int_\Sigma \delta(\xi_1)\delta(\xi_2)\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_3}G_{n1} + \frac{\partial}{\partial\xi_1}G_{n3}\right\}dS$$

$$= \mu\overline{\Delta u}(t)A * \int_V \delta(\xi_1)\delta(\xi_2)\delta(\xi_3)\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_3}G_{n1} + \frac{\partial}{\partial\xi_1}G_{n3}\right\}dV(\boldsymbol{\xi})$$

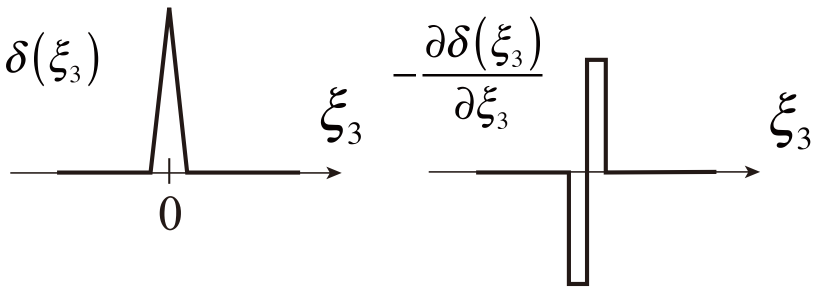
ここでA は断層面積。結局

$$u_n(\mathbf{x},t) = \mu\overline{\Delta u}(t)A * \int_V \left\{\delta(\xi_1)\delta(\xi_2)\left[-\frac{\partial\delta(\xi_3)}{\partial\xi_3}\right]G_{n1} + \left[-\frac{\partial\delta(\xi_1)}{\partial\xi_1}\right]\delta(\xi_2)\delta(\xi_3)G_{n3}\right\}dV(\boldsymbol{\xi})$$

等価体積力　その３

デルタ関数の空間微分の意味を考える

$$-\frac{\partial\delta(\xi_3)}{\partial\xi_3}$$



従って、

$$\int_V \delta(\xi_1)\delta(\xi_2)\left[-\frac{\partial\delta(\xi_3)}{\partial\xi_3}\right]G_{n1}\,dV(\xi)$$

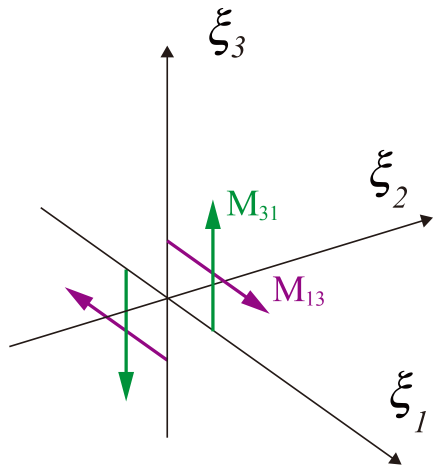
は　ξ_3 軸上に始点があるξ_1軸方向に作用する偶力によって生じる変位に他ならない。

つまりに M13 相当によって生じる変位

同様にして、

$$\int_V \delta(\xi_1)\delta(\xi_2)\left[-\frac{\partial\delta(\xi_3)}{\partial\xi_3}\right]G_{n1}\,dV(\xi)$$

これは M31 相当によって生じる変位



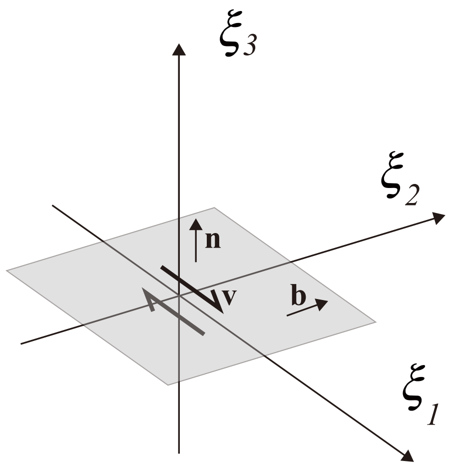
等価体積力　その４

まとめると、断層運動の等価体積力は**ダブルカップル、**つまり**モーメントテンソル**で表現できる。

断層運動

$$\Delta\mathbf{u}(\xi,t)=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\Delta u(\xi,t),\quad \mathbf{n}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

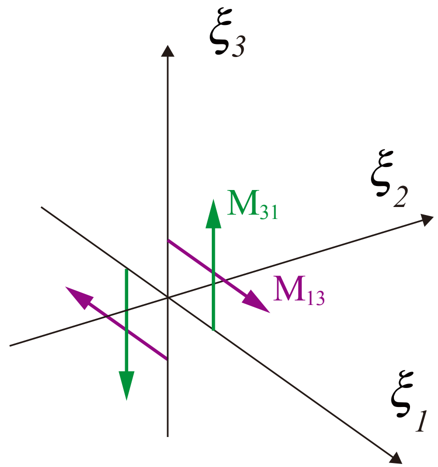
断層面積 A　＋　点震源仮定



＝

モーメントテンソル

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & \mu\overline{\Delta u}(t)A\\ 0 & 0 & 0\\ \mu\overline{\Delta u}(t)A & 0 & 0\end{bmatrix}$$



地震モーメント

式を書き直すと

$$u_n(\mathbf{x},t) = \mu\overline{\Delta u}(t)A * \int_\Sigma \delta(\xi_1)\delta(\xi_2)\left\{\frac{\partial}{\partial\xi_3}G_{n1} + \frac{\partial}{\partial\xi_1}G_{n3}\right\}dS(\boldsymbol{\xi})$$

時間を∞に持って行くと、

$$u_n(\mathbf{x},\infty) = \mu\overline{\Delta u}(\infty)A \times \left\{\frac{\partial}{\partial\xi_3}G_{n1}(\mathbf{x},\infty;\boldsymbol{\xi},0) + \frac{\partial}{\partial\xi_1}G_{n3}(\mathbf{x},\infty;\boldsymbol{\xi},0)\right\}$$

つまり、最終的な地殻変動は、地震モーメント　$M_0 = \mu\overline{\Delta u}(\infty)A$
に比例することとなる。

地震モーメントは、**静的な変位量**で定義されていることが分かる。つまり、地面が揺れなくても求めることができる。

地震モーメントは地震学の基礎になっているが、本当に地震モーメントという値はそんなに素晴らしいものなのだろうか？　地震動と地震モーメントの関係という視点で、問題点について考えてみよう。