

# 1.1 波動伝播の基礎

## 地震波を伝える媒体

何故、地中を地震波が伝播するのか理解する。

## 波面と波線

波面と波線が分かれば、波の伝播する方向が分かること知る。

## 多層構造中の波動伝播

スネルの法則と波線パラメーターを理解する。

## 表面波

地表を伝わっていく波について知る。

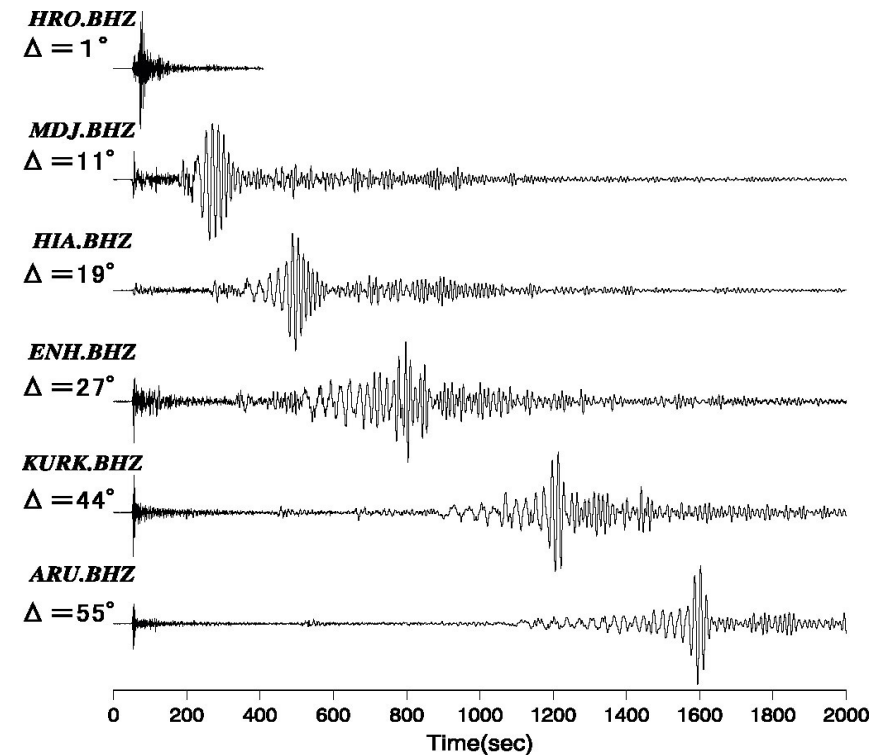
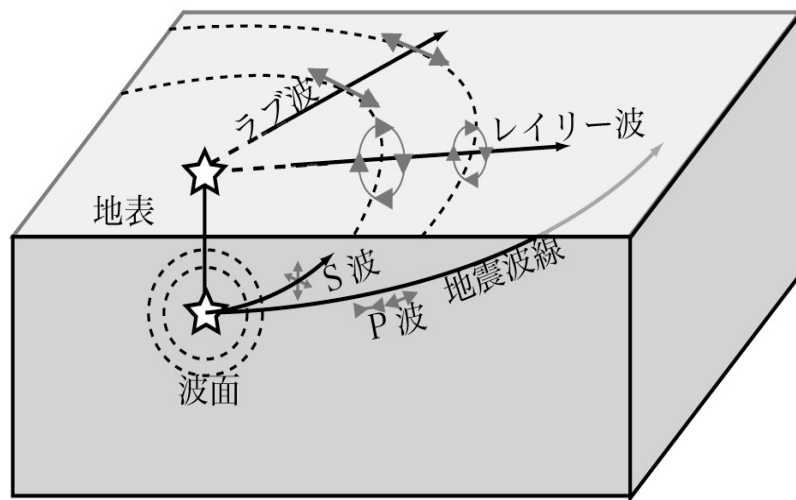
## 固有振動

地球の固有振動について知る。

## 参考文献：

- ① 金森編，地震の物理，岩波地球科学選書

## 1.1 波動伝播の基礎



地震が発生すると実体波が地球内部を、表面波が地表を通して伝播する。

実体波： P波（遠地項、中間項）、S波（遠地項、中間項）、近地項

表面波： ラブ波、レイリー波

表面波は地表のみを通るので、距離減衰しにくい、実体波は地中を通るので距離減衰しやすい。 → 遠くの観測点ほど、表面波が卓越する。

実体波の波面の面積は  $4\pi r^2$  で拡大する。波のエネルギーは、保存されるので、距離の2乗で減衰する。エネルギーは速度の2乗であることに注意すると、実体波は、 $1/r$  で距離減衰することがわかる。円筒波である表面波でもエネルギーは保存されるので、 $1/\sqrt{r}$  で減衰することになる。

## I.1 波動伝播の基礎

# 地震波を伝える媒体 その1

### 地震波は弾性波

変形を元に戻そうとする弾性力と、運動を続けようとする慣性力によって生じる。

フックの法則で定義される弾性率 $C$ を用いて、地震波の伝わる速度は、

$$\sigma = C\varepsilon$$

応力      歪み

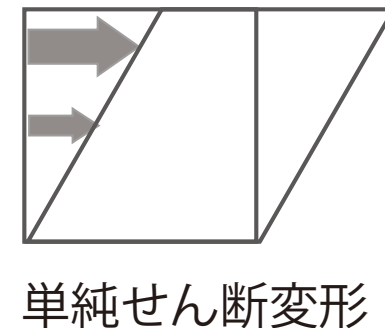
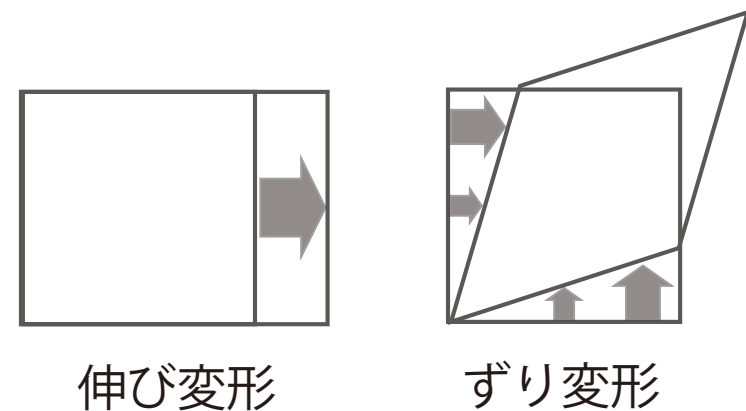
$$c = \sqrt{C/\rho}$$

地震波速度

伸び縮み変形に対する弾性率 $C_1$ とずり変形に対する弾性率 $C_2$ は異なる。よって、P波とS波の伝播速度は異なる。

**注意：**「ずり変形」≠「単純せん断変形」である事に注意すること。

単純せん断変形＝せん断変形＋剛体回転



## 1.1 波動伝播の基礎

# 地震波を伝える媒体 その2

### 波動方程式

時間の2回微分と空間の2回微分に波の伝播速度の2乗をかけたものが一致する。

$$\ddot{u}(\mathbf{x}, t) = c^2 \nabla^2 u(\mathbf{x}, t)$$

弾性波の場合、分かりやすく書くと

$$\rho \ddot{u}(\mathbf{x}, t) = C \nabla^2 u(\mathbf{x}, t)$$

つまり、慣性力と弾性力が釣り合っているという式となる。

### 非同次波動方程式

例えば、体積力が作用すること考えると

$$\ddot{u}(\mathbf{x}, t) = c^2 \nabla^2 u(\mathbf{x}, t) + f(\mathbf{x}, t)$$

この方程式の解は、分かっているのでそれを利用すれば良い。

P波とS波の波動方程式は、ナビエの式から導かれる。

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$$

天下りのであるが、P波（スカラーポテンシャル）は、

$$\ddot{\phi} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \nabla^2 \phi$$

S波（ベクトルポテンシャル）は、

$$\ddot{\boldsymbol{\psi}} = \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \boldsymbol{\psi}$$

となる。ラメの定数は正の値なので、伸び縮み変形よりずり変形の方が変形しやすいということが分かる。

# 地震波を伝える媒体

## その3

P波とS波の速さは

伸び縮み変形に対する弾性率 $C_1$

ズリ変形に対する弾性率 $C_2$

で定まる。この値は剛性率 $\mu$ とポアソン比でも表現できる。

$$C_1 = \lambda + 2\mu = \frac{2(1-\nu)\mu}{1-2\nu}$$

$$C_2 = \mu$$

ポアソン比

$\mu$ に着目すると、P波速度 ( $\alpha$ ) とS波速度 ( $\beta$ ) の比はポアソン比のみの関数になる。

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}$$

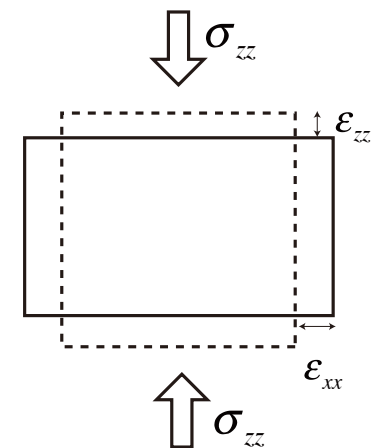
### ポアソン比 (復習)

物体を圧縮したときに、横方向に発生した歪み ( $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$ ) を、縦方向の歪み ( $\epsilon_{zz}$ ) で割った値  $\times -1$  未固結な物質ほど、大きな値となる。

$$\nu_x = -\frac{\epsilon_{xx}}{\epsilon_{zz}}, \quad \nu_y = -\frac{\epsilon_{yy}}{\epsilon_{zz}}$$

等方的な場合は、 $\nu = \nu_x = \nu_y$  となる。

単位立方体の変形



# 地震波を伝える媒体 その4

岩石の代表的なポアソン比は

$$\nu = 1/4$$

この弾性体は「ポアソン物質」と呼ぶ  
ラメの定数は、

$$\lambda = \mu$$

となり、P波とS波の速度比は

$$\alpha/\beta = \sqrt{3} \simeq 1.7$$

一般に、 $\alpha/\beta$ は、岩石の「未固結」の  
度合いを示す。

この値が大きいということは、横に広がり  
やすい、せん断変形がしやすい物質で  
あることを意味する。

# 地震波を伝える媒体 その5

### 大森公式

初期微動継続時間と震源距離（ $r$ ）の関係

$$T_{ps} = \frac{r}{\beta} - \frac{r}{\alpha}$$

押し引きによる変形と、面をずらす変形では、面をずらす変形の方が変形しやすい。

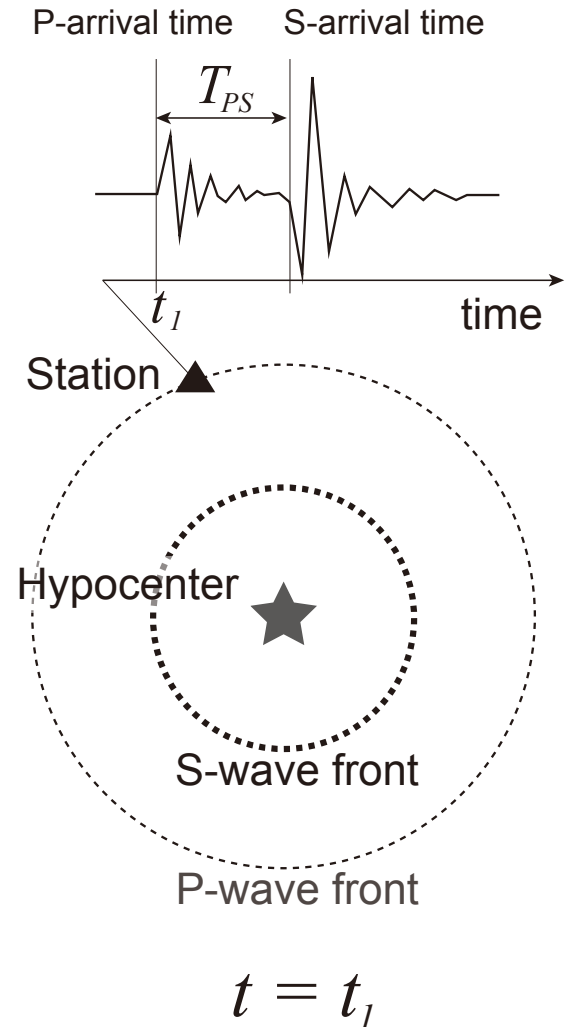
つまり、S波の速度の方が常に遅いし、S波の方が大きな振幅となりやすい。

仮に  $\alpha=6$  [km/s]  $\beta=3.5$  [km/s] とすると

$$r = T_{ps} \frac{\alpha\beta}{\alpha - \beta} \simeq 8T_{ps}$$

よって、初期微動継続時間を8倍するとおおよその震源距離がわかる。

緊急地震速報は、P波とS波の性質を上手く利用している。（調べてみよう）



## I.1 波動伝播の基礎

# 波面と波線 その1

**波面**：同位相の面

**波線**：常に波面の垂直な波の伝播方向

変位の時空間分布を、

$$u(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}) \exp j[\omega t - \phi(\mathbf{x})]$$

地震波形      振幅                      波の位相  
(変位)

とする（これは波動方程式の一般解）

波面は位相が一定の面なので、

$$\omega t - \phi(\mathbf{x}) = \text{const.}$$

よって波面に垂直な波の進行方向は、  
位相の空間微分

$$\mathbf{k} = \text{grad}[\omega t - \phi(\mathbf{x})] = \nabla \phi(\mathbf{x})$$

波面の移動速度（1次元で考える）

$\delta t$  の時間に、同位相の波面が  $k$  方向  
に  $\delta x$  だけ移動

$$\omega \delta t - |\mathbf{k}| \delta x = 0$$

よって位相速度は、

$$c = \delta x / \delta t = \omega / |\mathbf{k}|$$

波線の形状はアイコナル(eikonal)方程式を解けばよい。

$$|\nabla \phi(\mathbf{x})| = \omega / c$$



## 1.1 波動伝播の基礎

# 弾性波のアイコナル方程式

波動方程式に変位を入れてやると、

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}, t) = 1/c^2 \ddot{u}(\mathbf{x}, t)$$

左辺は、位相に比して振幅の変動が十分に小さい場合（**短波長近似\***）

$$\begin{aligned}\nabla^2 u(\mathbf{x}, t) &= \nabla \{ \nabla A + A(-j\nabla\phi) \} e^{j[\omega t - \phi(\mathbf{x})]} \\ &\simeq \nabla \{ A(-j\nabla\phi) \} e^{j[\omega t - \phi(\mathbf{x})]} \\ &\simeq A(-j\nabla\phi)^2 e^{j[\omega t - \phi(\mathbf{x})]} = -(\nabla\phi)^2 u(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

右辺は、

$$\begin{aligned}1/c^2 \ddot{u}(\mathbf{x}, t) &= 1/c^2 (j\omega)^2 A e^{j[\omega t - \phi(\mathbf{x})]} \\ &= -\omega^2/c^2 u(\mathbf{x}, t)\end{aligned}$$

右辺と左辺をくっつけて

$$(\nabla\phi)^2 = \omega^2/c^2$$

よって、アイコナル(eikonal)方程式が定まる。

$$|\nabla\phi(\mathbf{x})| = \omega/c$$

この式は、あくまで位相の空間微分が存在する場合、つまり、波の伝播速度が空間的に穏やかに変化する場合に成立する。

\*菊地先生の本に従って、短波長近似と書いているが、この仮定は、短波長でなくても、振幅が空間方向に大きく変化しない場合、例えば、緩やかに伝播速度が変化する場合にも成立する。

## I.1 波動伝播の基礎

# 短波長近似 or 高周波近似？

走時 $T$ を用いると、先ほどの変位は、

$$u(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{x}) e^{j\omega[t-T(\mathbf{x})]}$$

と書ける。波動方程式に代入すると、左辺は、

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(\mathbf{x}, t) &= \nabla \{ \nabla A - j\omega A \nabla T \} e^{j\omega[t-T(\mathbf{x})]} \\ &= \left[ \begin{aligned} &\nabla^2 A - j\omega \nabla A \nabla T - j\omega A \nabla^2 T \\ &- j\omega \nabla A \nabla T - A(\omega \nabla T)^2 \end{aligned} \right] e^{j\omega[t-T(\mathbf{x})]} \end{aligned}$$

右辺は、

$$\frac{1}{c^2} \ddot{u}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\omega^2}{c^2} A e^{j\omega[t-T(\mathbf{x})]}$$

右辺と左辺をくっつけて、実数部分に着目すると、

$$\nabla^2 A - A\omega^2 (\nabla T)^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} A$$

となる。式を変形すると、

$$(\nabla T)^2 = \frac{1}{c^2} - \frac{\nabla^2 A}{A\omega^2}$$

高周波にすれば、右辺第2項は小さくなるので、アイコナール方程式が定まる。

**(高周波近似)**

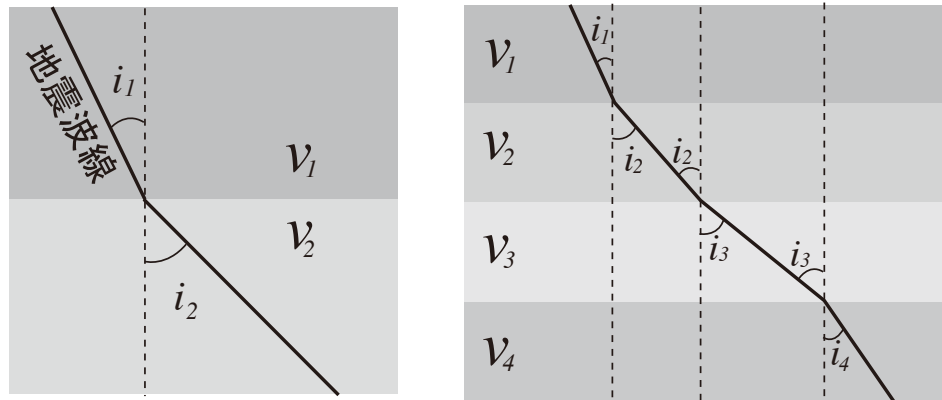
$$|\nabla T| = 1/c$$

「高周波近似」と「短波長近似」のどちらを用いても、アイコナール方程式が定まる。

# 波面と波線 その2

スネルの法則を使って考えてみよう。

$$\frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2} = \frac{\sin i_n}{v_n} = p$$



ここで角度  $i$  は常に  $0 < i < 90^\circ$  なので、波線は遅い層に向かって傾くことになる。

一つの波線に一つの  $p$  が定まる、 $p$  を波線パラメータと呼ぶ。

球座標系でも波線パラメータを導入できる（宇津の地震学4章）。

## フェルマーの公式

点  $a$  から  $b$  までの最短経路は、屈折率の経路積分を最小とする線となる。これが波線となる。

$$I = \int_a^b n(x,y) ds$$

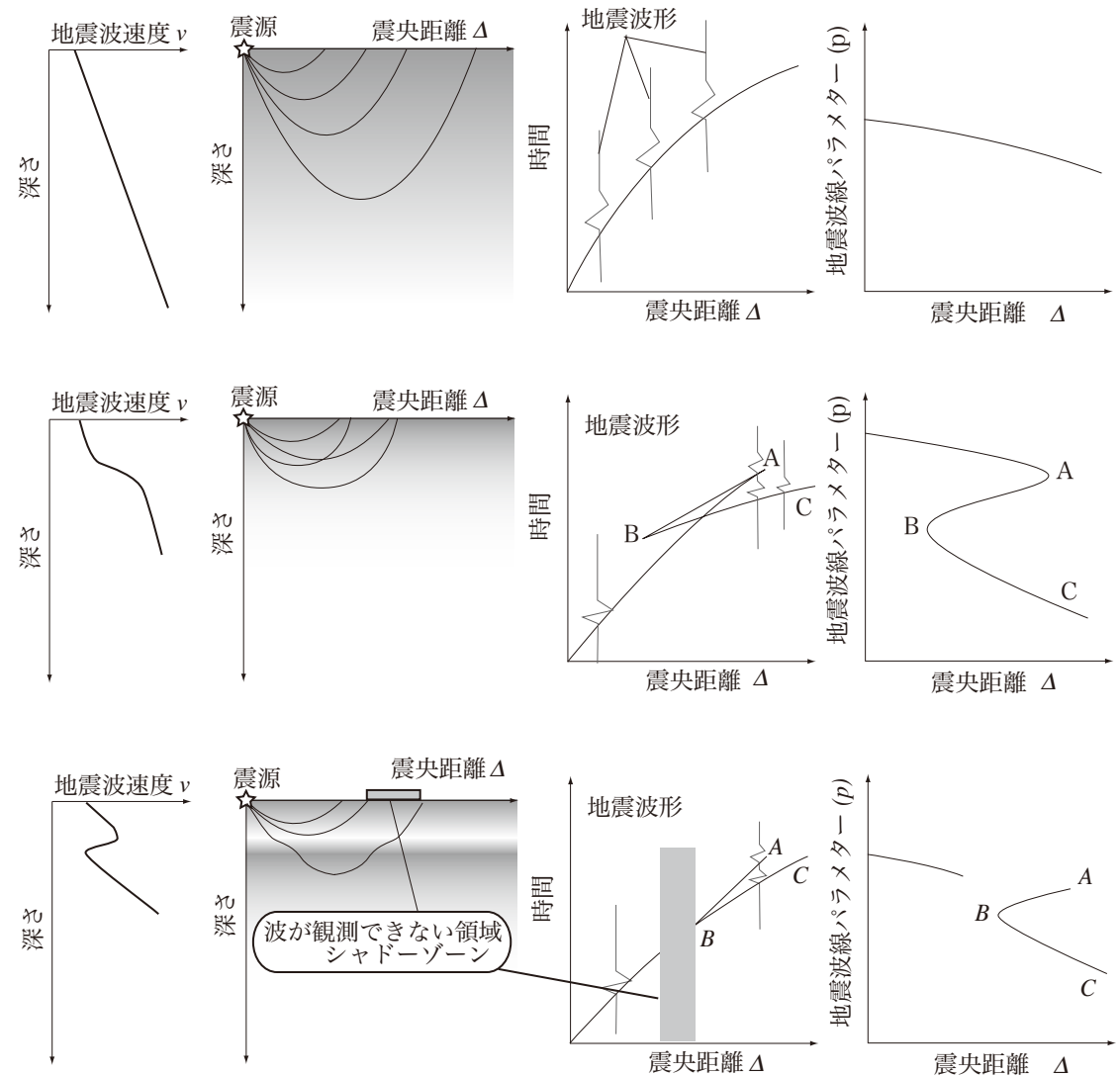
最小値問題を解くことになる。変分法におけるオイラーの公式を使えば、スネルの法則が導ける。（時間があったらトライしてみよう）

## I.1 波動伝播の基礎

# 波面と波線 その3

地下構造が定まると、どのように波が観測点に伝播するのかが分かる。このとき、深さと共に減速すると、波線は上に凸に曲がるために、実体波が観測されない地点ができる。

地球上では、アセノスフィア（部分熔融している）と外核（完全に熔融している）で深さと共に減速する境界があるので、ここでシャドーゾーンが生成される。



## I.1 波動伝播の基礎

# 多層構造中の波動伝播

地表に柔らかい層があると、地震の波は増幅する。

1/4波長則：層の厚さが1/4波長になるような周波数が表層地盤の共振周波数となる。

免震等で建物の周波数を変えるときには、共振しない周期に持っていることが重要  
これを考えないと、お金をかけたのに揺れやすい建物ができあがる。

詳しい内容を勉強したい時は、研究室にある竹中先生の講義ノートを参照すること

## I.1 波動伝播の基礎

# 表面波

レーリー (Rayleigh) 波

地表という自由表面にトラップされた波で、波の進行方向に楕円のように動く。

ラブ (Rayleigh) 波

地表付近は速度の遅い層がある。この層に光ファイバーの時のように、S波 (SH) がトラップされる。これがラブ波。

表面波はS波より遅く、速度は周波数に依存する。この性質を分散と呼ぶ。

表面波の導出は、「地震の物理 (岩波書店)」が分かりやすいので参照のこと

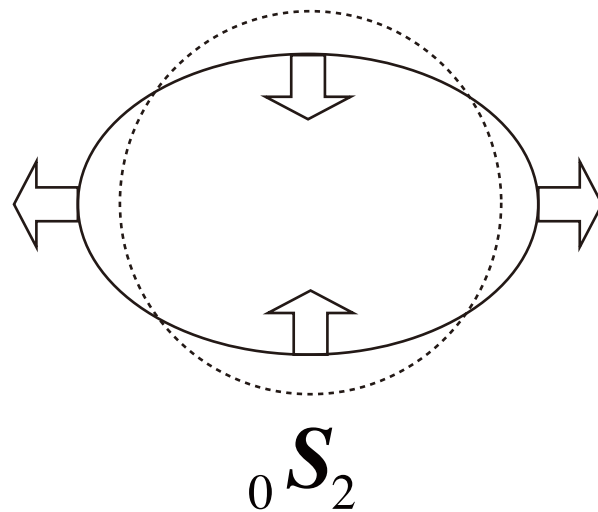
## 1.1 波動伝播の基礎

# 固有振動

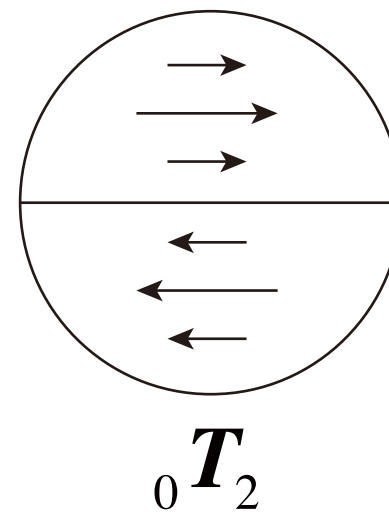
自由振動を行うときに、弾性体の大きさ・形・物性によって定まる特有の振動。  
固有の振動数を、固有は振動振動数という。

地球の場合、伸び縮みする振動モード ( $nS_m$ ) と、ねじる振動モード ( $nT_m$ ) がある。

1990年代以降、海洋波浪等を力源として、つねに地球は自由振動していることが分かっている。



周期～54分



周期～44分