連続体力学の基礎

八木勇治

0-1) ベクトル解析の基礎

連続体の変形を考えるときはベクトル演算子ナブラが重要、
これで、関数の勾配（grad）、発散（div）、回転（rot）がもとまる。

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

スカラー関数の傾き（勾配）：
傾きなのでベクトルが求まる

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

ベクトル関数の発散成分　：
発散量なのでスカラー量

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}$$

ベクトル関数の回転　：
回転方向なのでベクトル量

$$\nabla \times \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} & \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} & \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

0-1) ベクトル解析の基礎（続き）

スカラー演算子ラプラシアンも重要

$$\Delta = \nabla^2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_3}^2}$$

と書ける。ベクトルにも、スカラーにも作用させることができる。

波動方程式 $\ddot{\mathbf{u}} = c^2 \nabla^2 \mathbf{u}$

時間の二回微分と空間の二回微分が釣り合う。

拡散方程式 $\dot{\varphi} = \kappa \nabla^2 \varphi$

時間の二回微分と空間の一回微分が釣り合う。

ポアソン方程式 $\varphi = \nabla^2 \phi$

右辺が０のときラプラス方程式となり、解は調和関数となる。

0-2) 演算子の合成

わりと直感と一致する。

勾配成分に回転成分は含まれない $\nabla\times\nabla f=0$

回転成分に発散成分は含まれない $\nabla\cdot\left(\nabla\times\mathbf{A}\right)=0$

回転の回転は面倒 $\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\ \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right)-\nabla^2\mathbf{A}$

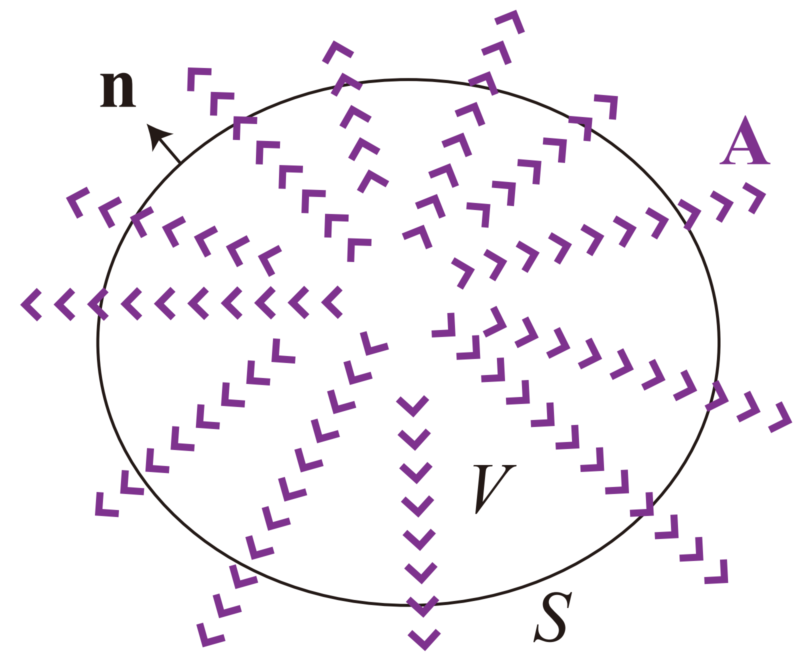
$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}A_{3,\,2}-A_{2,\,3} & A_{1,\,3}-A_{3,\,1} & A_{2,\,1}-A_{1,\,2}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}A_{2,\,12}-A_{1,\,22}-A_{1,\,33}+A_{3,\,13} & A_{3,\,23}-A_{2,\,33}-A_{2,\,11}+A_{1,\,21} & A_{1,\,31}-A_{3,\,11}-A_{3,\,22}+A_{2,\,32}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}A_{1,\,11}+A_{2,\,21}+A_{3,\,31}-A_{1,\,\mathrm{ii}} & A_{1,\,12}+A_{2,\,22}+A_{3,\,32}-A_{2,\,\mathrm{ii}} & A_{1,\,13}+A_{2,\,23}+A_{3,\,33}-A_{3,\,\mathrm{ii}}\end{pmatrix}$$
$$=\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right)-\nabla^2\mathbf{A}$$

0-3) 重要な定理

直感と一致する
ガウスの定理：

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, dS$$

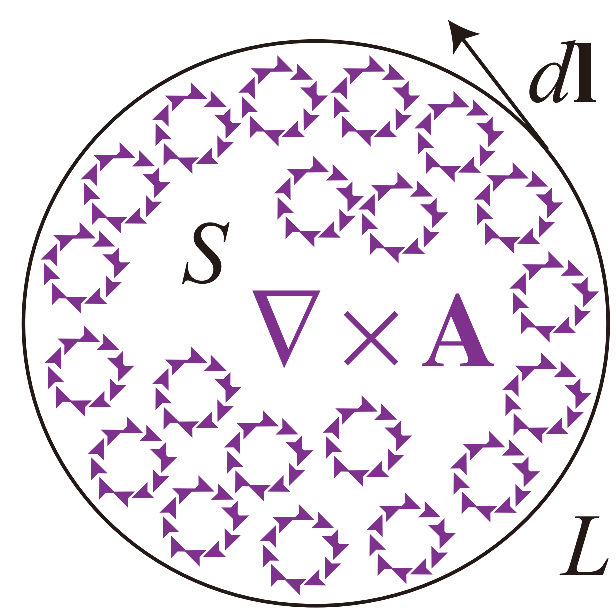
発散成分の体積積分（体積Vにおける総発散量）は、表面Sにおける法線方向の成分は面積積分すれば良い。



ストークスの定理：

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

ベクトルの回線成分の面積分は、結局のところ、境界における接線との内積の積分量と同じ。



0-4)連続体の変形を考える上で重要な点

連続体の変形を理解するのに重要なもの

連続体内部の作用する力の記述：	応力＋体積力
連続体内部のゆがみの記述：	歪み
応力と歪みの関係の記述：	構成則

重要な概念

応力は釣り合っている：	平衡方程式
＋慣性力も合わせて釣り合う：	運動方程式

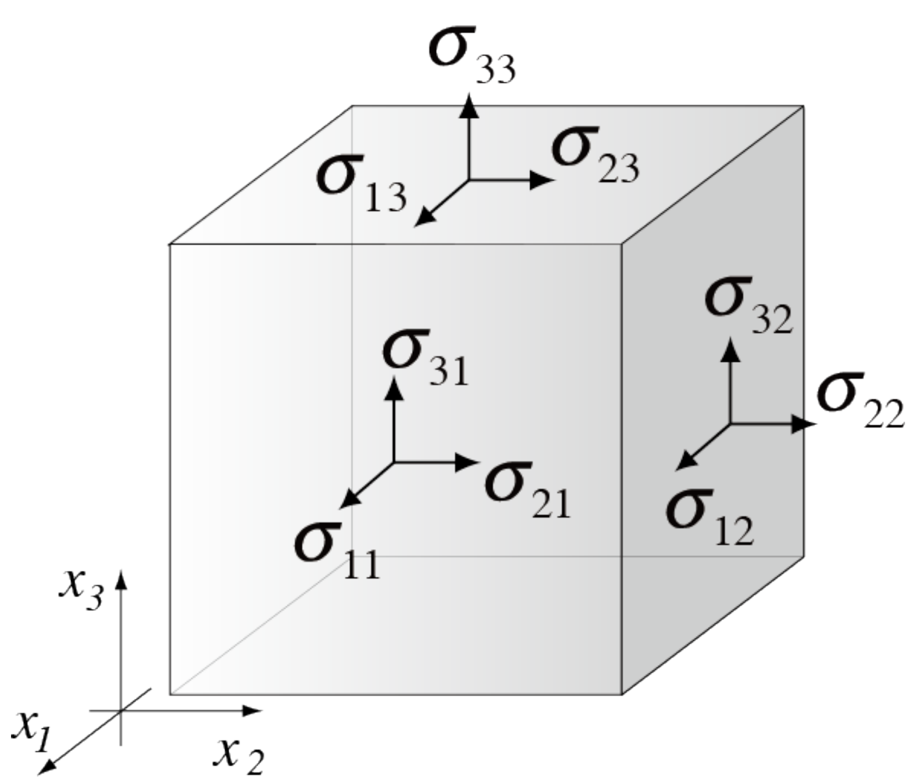
これらを合わせると＝＞

弾性体の変形を記述することができる式：　ナビエの式

ナビエの式を使うと、地震等の変動を求めることができる。
P波とS波の波動方程式や、S波の速度がP波よりも1/√3 ほど遅いことも導くことができる。

1-1) 応力の定義

応力（Pa）＝　面に作用する単位当たりの力
面に垂直に作用する応力は、垂直応力
面をずらす方向に作用する応力は、せん断応力



応力は応力テンソルで表現される。
j 軸に垂直な面に作用する i 軸方向の応力は、

$$\sigma_{ij}$$

$i = j$ 垂直応力
$i \neq j$ せん断応力
対称テンソルなので、

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

固体地球科学では、慣例的に面に垂直方向に押す方向を正とする場合が多い。
連続体力学とは逆向きにとっているので注意すること。

1-2) 総和規約

添字を上手く使って、式をシンプルにしたい。
例えばコーシーの関係式は、

$$T_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij} n_j$$

と書けるが、いちいちΣを書くのは面倒
ようは二つ以上ある添字に対する足し算なのだから、

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

と書けば良い。例えば、静水圧応力は、

$$\sigma_m = \left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right)/3$$

であるが、総和規約を使うと、シンプル

$$\sigma_m = \sigma_{kk}/3$$

便利な関数：クロネッカーのデルタ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

総和規約と合わせると、

$$\sigma_{ij}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ii} = \sigma_{ii}$$

直交する基底ベクトルの内積は、

$$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \delta_{ij}$$

となる。
「交代記号」という便利なものがあるが、本講義では省く（調べてみよう）

1-3) コーシーの関係

応力ベクトル
トラクションとも呼ばれ、ある微小面積に作用する単位面積あたりの力、
応力との関係として、

$$T_i = \sigma_{ij} n_j$$

が成立。この式をコーシーの関係とよぶ。

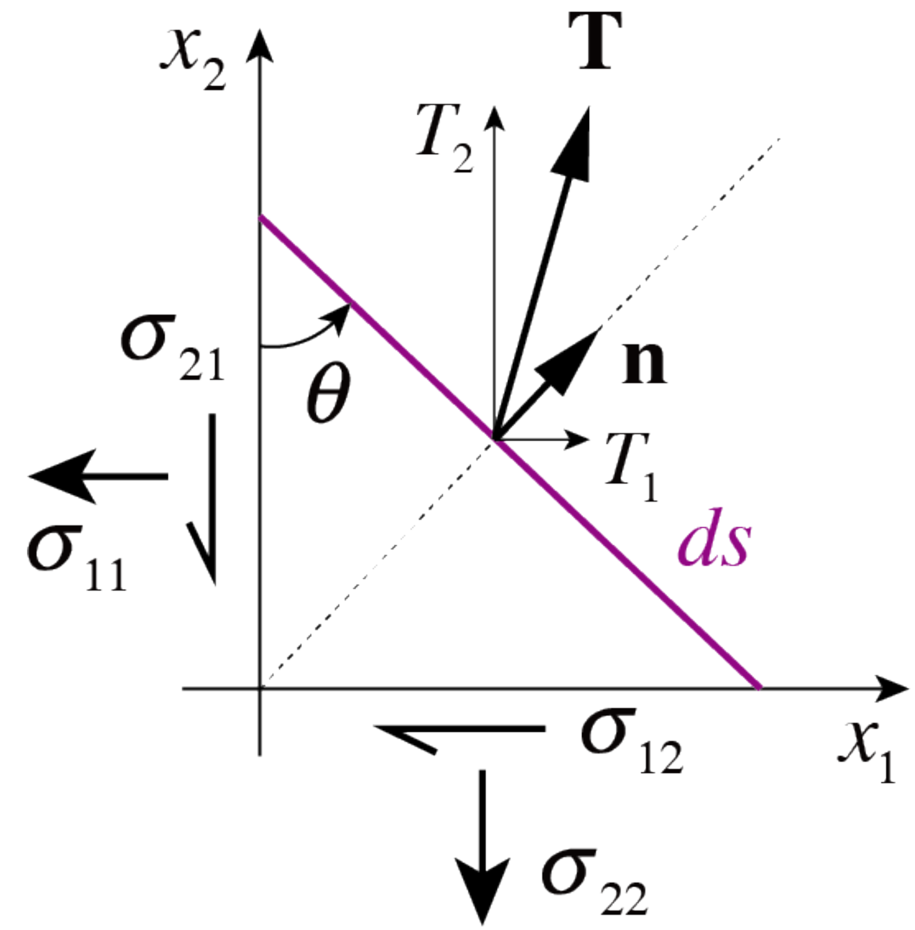
２次元の場合だと簡単に導ける。
まずは x_1 軸方向の力の釣り合いから、

$$T_1 ds = \sigma_{11} dx_2 + \sigma_{12} dx_1$$
$$= \left(\sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2\right) ds$$
$$\therefore T_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2$$

同様にして、

$$T_2 = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2$$

成立していることがわかる。



３次元でもちょっと面倒になるだけで、
同じように導ける。

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

1-4) 主応力

応力テンソルは、

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

と書ける。これはエルミート行列、つまり、

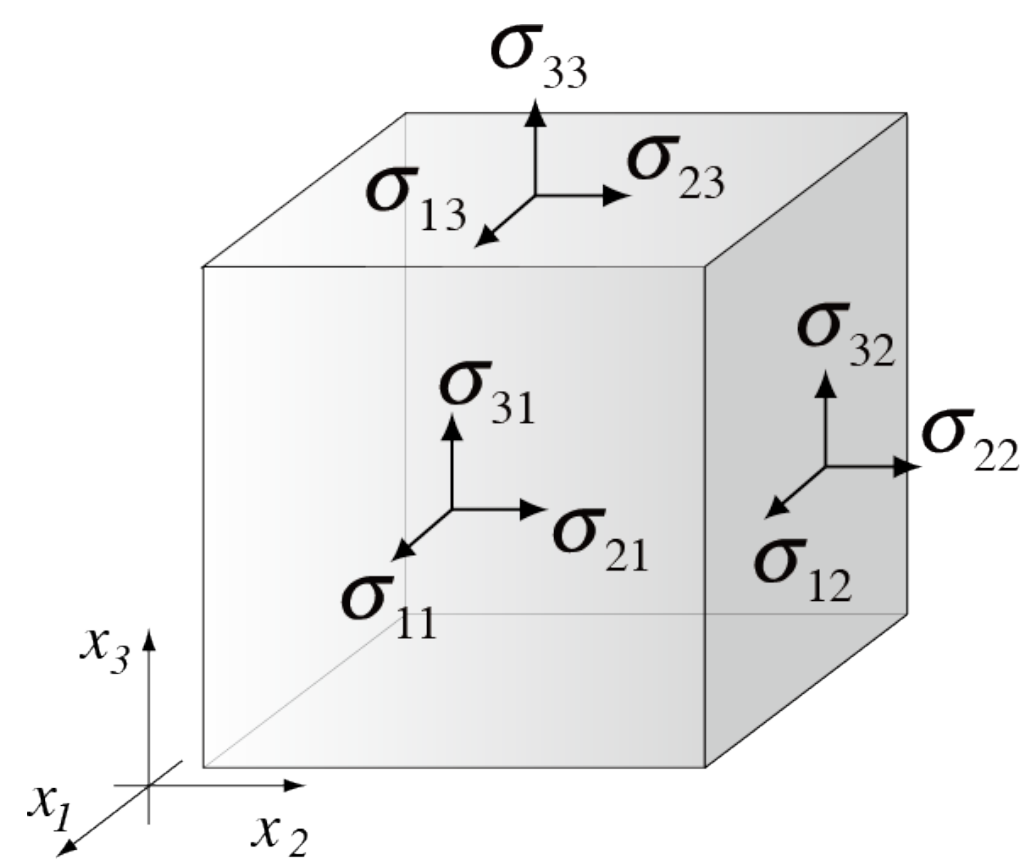
$$\boldsymbol{\sigma}_{ij} = \boldsymbol{\sigma}^{*}_{ji}$$

*は複素共役。

この時、固有値は常に実数となる。
固有値を、$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ とすると、

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \mathbf{R}^T$$

この固有値は、「主応力」と呼ばれる。
全ての応力場は、この3つの垂直応力の回転で表現できる。



1-5) 固有値（復習）

応力を考える時、固有値は主応力の値、固有値ベクトルは、それぞれの主応力軸の方向を示す。
求める段階で出てくる不変量は物質の強度を考える時に重要
行列の対角化は、回転！
2次元で考えると固有値は、

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11}-\lambda & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - \left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)\lambda - \sigma_{12}\sigma_{21} = 0$$

の根となる。回転しても、上の式は同じなので、不変量は、

$$J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22}$$
$$J_2 = \sigma_{12}\sigma_{21}$$

と定義できる。J1は第一応力不変量、J2は第二応力不変量と呼ばれる。
同様に3次元の時も不変量が定義できる（やってみよう）。

固有ベクトルは、

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}-\lambda^i & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\lambda^i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^i \\ v_2^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を満たす。

1-5) 固有値（復習）

書き直すと、

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^i \\ v_2^i \end{pmatrix} = \lambda^i \begin{pmatrix} v_1^i \\ v_2^i \end{pmatrix}$$

2次元では固有値は二つあるので、

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^1 v_1^1 & \lambda^2 v_1^2 \\ \lambda^1 v_2^1 & \lambda^2 v_2^2 \end{pmatrix}$$

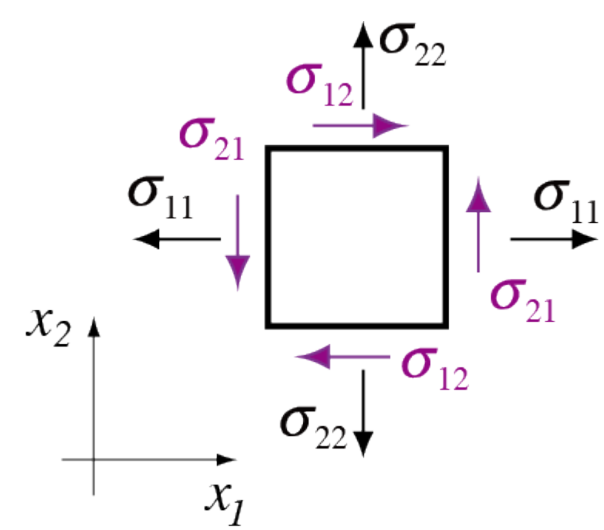
$$= \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

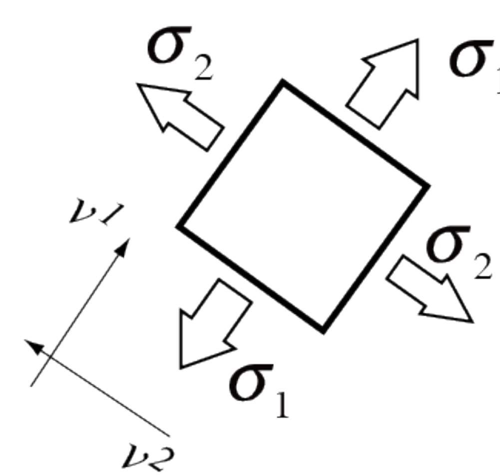
規格化した固有ベクトルを合わせたものは回転行列なので、転置行列が逆行列

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{R}\begin{pmatrix} \lambda^1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}\mathbf{R}^T$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_1^2 \\ v_2^1 & v_2^2 \end{pmatrix}$$

よって、「固有値と固有ベクトルを求めること」＝「主応力と主応力軸の方向を求めること」



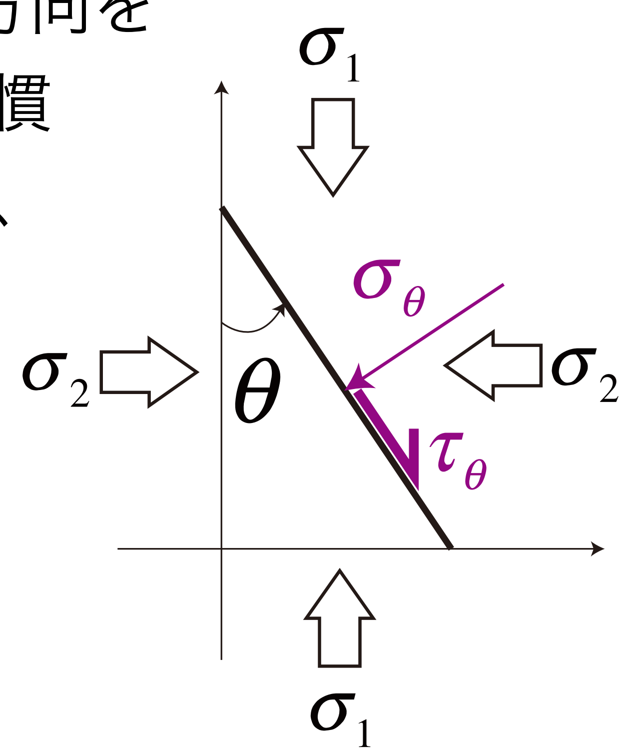


1-5) 固有値（復習）

2次元で考える＋押す方向を正とする（固体地球の慣例）。主応力の回転は、

$$\boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{R}\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}\mathbf{R}^T$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

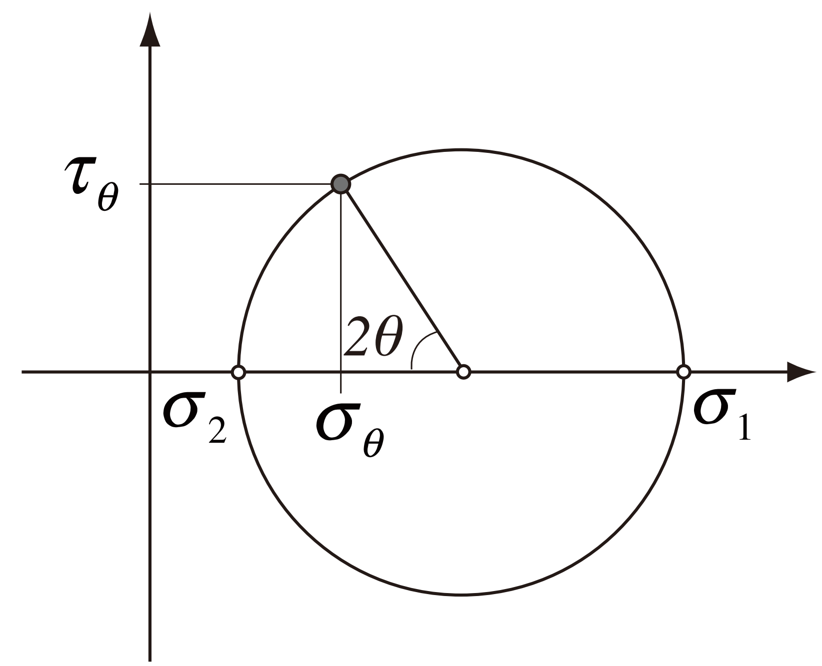


図のように、垂直応力とせん断応力を定義し、二倍角の公式を使うと

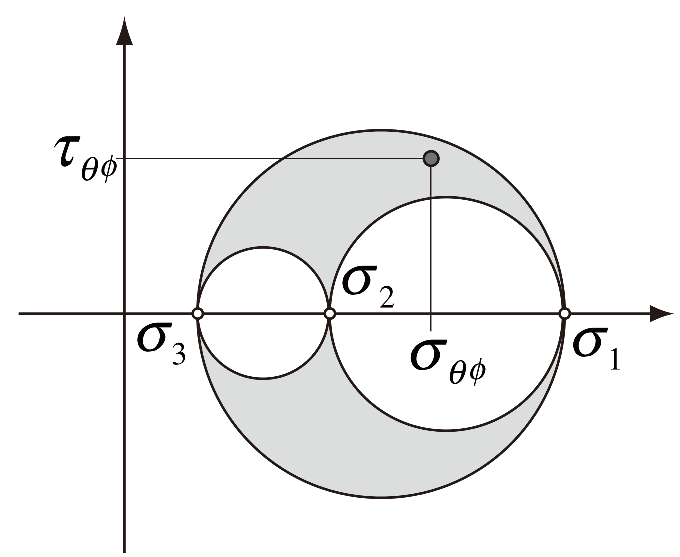
$$\sigma_\theta = \sigma_{11} = \sigma_1\cos^2\theta + \sigma_2\sin^2\theta$$
$$= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\theta$$
$$\tau_\theta = \sigma_{12} = (\sigma_1-\sigma_2)\cos\theta\sin\theta$$
$$= \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\theta$$

つまり、ある円に常に応力が存在

→　モールの円



3次元のモールの円



任意の面に作用する応力は、灰色の部分に存在

1-6) 最大せん断応力・偏差応力

ここで　$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$　とした場合は、
最大せん断応力は、

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

となる。この値は、物質が降伏する強度と関係するという考え方がある（トレスカの降伏条件）

応力の等方成分を取り出すと、

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \frac{1}{3}\left(\boldsymbol{\sigma}_{11} + \boldsymbol{\sigma}_{22} + \boldsymbol{\sigma}_{33}\right) = \frac{1}{3} J_1 = p$$

これを平均応力と呼ぶ。応力の等方成分が増えても破壊しないので、これを差し引いた偏差応力が重要なパラメターとなる。

偏差応力は、

$$dev[\boldsymbol{\sigma}] = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{I}$$

と書ける。
ここで、偏差応力の第二応力不変量が、物質が降伏する強度と関係するという考え方がある（ミーゼスの降伏条件）

第二応力不変量は、

$$J_2 = \frac{1}{6}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right]$$

と書ける。（導出してみよう）

1-7) 平衡方程式・運動方程式　その１

応力の釣り合いから導出される式で、
重要な式
ある軸の方向に作用する力は釣り合う

x_1軸方向の力を考える。

x_1 面に作用する力

$$-\sigma_{11}dx_2dx_3,\quad \left(\sigma_{11}+\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}dx_1\right)dx_2dx_3$$

x_2 面に作用する力

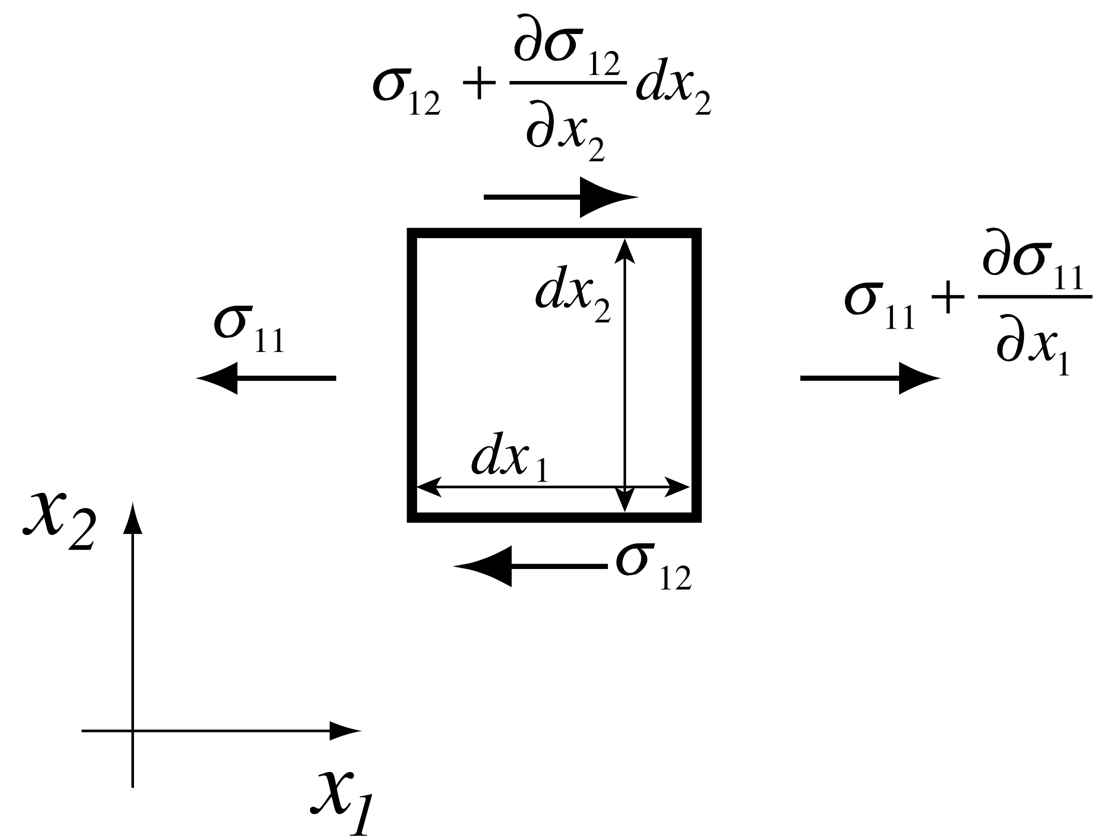
$$-\sigma_{12}dx_3dx_1,\quad \left(\sigma_{12}+\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2}dx_2\right)dx_3dx_1$$

x_3 面に作用する力

$$-\sigma_{13}dx_1dx_2,\quad \left(\sigma_{13}+\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3}dx_3\right)dx_1dx_2$$

ここで、応力の偏微分は単位距離当たりの変化量を表す。変化量に距離をかけてあげれば、離れた点での値が求まる

２次元の場合を想像すると楽



1-7) 平衡方程式・運動方程式　その２

x_1軸方向に作用するは釣り合うので、結局、先ほどの値を足し合わせたものが０となる。

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}=\frac{\partial \sigma_{1k}}{\partial x_k}=0$$

仮に立方体に体積力 f_1 が作用している場合は、平衡方程式

$$\frac{\partial \sigma_{1k}}{\partial x_k}+f_1=0$$

ダイナミックな問題の場合、慣性項が入るので、運動方程式は、

$$\frac{\partial \sigma_{1k}}{\partial x_k}+f_1=\rho \ddot{u}_1$$

偏微分は、下記のように表現すると楽

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}=\sigma_{ij,j}$$

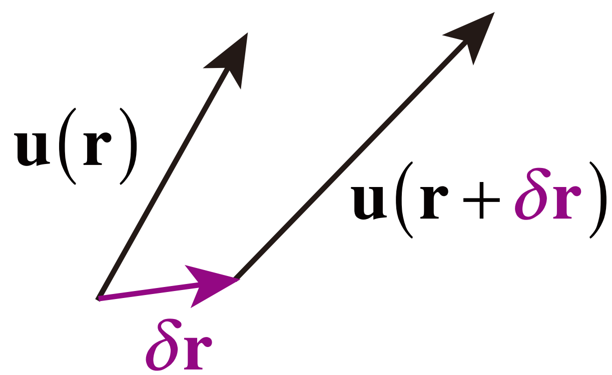
よって、他の軸についても同様にすると、結局

$$\sigma_{ij,j}+f_i=\rho \ddot{u}_i$$

とシンプルに書ける。（応力テンソルは対称テンソル）

2-1) 歪み　その1

単位長さ当たりの変位の変化量で、平行移動や剛体回転とは別なもの。
ある点 $\mathbf{r}$ の変位 $\mathbf{u}$ とそこから僅かに離れた点のとの相対変位を考える。



相対変位ベクトル $\delta\mathbf{u}$ は、

$$\delta\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r})-\mathbf{u}(\mathbf{r})$$

テイラー展開をすると、

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{u}&=\mathbf{u}(\mathbf{r})+\mathbf{D}\delta\mathbf{r}-\mathbf{u}(\mathbf{r})\\&=\mathbf{D}\delta\mathbf{r}\end{aligned}$$

内部変形に関わる行列は、

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}u_{1,1}&u_{1,2}&u_{1,3}\\u_{2,1}&u_{2,2}&u_{2,3}\\u_{3,1}&u_{3,2}&u_{3,3}\end{pmatrix}$$

と書ける。平行移動は差し引かれているが、剛体回転が含まれている。
剛体回転は、反対称テンソルとなり、内部歪みに関わるものは、対称テンソルとなるはずである。従って、行列 $\mathbf{D}$ は、対称テンソル $\mathbf{E}$ と反対称テンソル $\mathbf{\Omega}$ に分離できるはず。

$$\mathbf{D}=\mathbf{E}+\mathbf{\Omega}$$

具体的にはどうなっているか？

2-1) 歪み　その２

対称テンソルと反対称テンソルに分ける

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \mathbf{\Omega}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} u_{1,1}+u_{1,1} & u_{1,2}+u_{2,1} & u_{1,3}+u_{3,1} \\ u_{2,1}+u_{1,2} & u_{2,2}+u_{2,2} & u_{2,3}+u_{3,2} \\ u_{3,1}+u_{1,3} & u_{3,2}+u_{2,3} & u_{3,3}+u_{3,3} \end{pmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & u_{1,2}-u_{2,1} & u_{1,3}-u_{3,1} \\ u_{2,1}-u_{1,2} & 0 & u_{2,3}-u_{3,2} \\ u_{3,1}-u_{1,3} & u_{3,2}-u_{2,3} & 0 \end{pmatrix}$$

よって、歪みテンソルは、

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

となる。これが歪みであり、地下に蓄積した歪みを瞬時に解放するのが地震である。

反対称テンソルについて考える。ベクトルの回転成分は、

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} = \nabla \times \mathbf{u}$$

$$= \begin{pmatrix} u_{3,2}-u_{2,3} & u_{1,3}-u_{3,1} & u_{2,1}-u_{1,2} \end{pmatrix}$$

よって、

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

剛体回転による相対変位は

$$\mathbf{\Omega}\cdot\delta\mathbf{r} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\delta x_2\omega_3 + \delta x_3\omega_2 \\ \delta x_1\omega_3 - \delta x_3\omega_1 \\ -\delta x_1\omega_2 + \delta x_2\omega_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\times\delta\mathbf{r}$$

2-1') ベクトルのテーラー展開（おまけ）

成分別で考えてみる。x_1 成分では、

$$u_1(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}) = u_1(\mathbf{r}) + u_{1,1}\delta r_1 + u_{1,2}\delta r_2 + u_{1,3}\delta r_3$$

$$= u_1(\mathbf{r}) + \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_1 \\ \delta r_2 \\ \delta r_3 \end{pmatrix}$$

よって、他の成分もまとめると

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}) \\ u_2(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}) \\ u_3(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1(\mathbf{r}) \\ u_2(\mathbf{r}) \\ u_3(\mathbf{r}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_1 \\ \delta r_2 \\ \delta r_3 \end{pmatrix}$$

よって、内部変形に関わる行列は、

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{pmatrix}$$

となる。

2-2) 主歪み

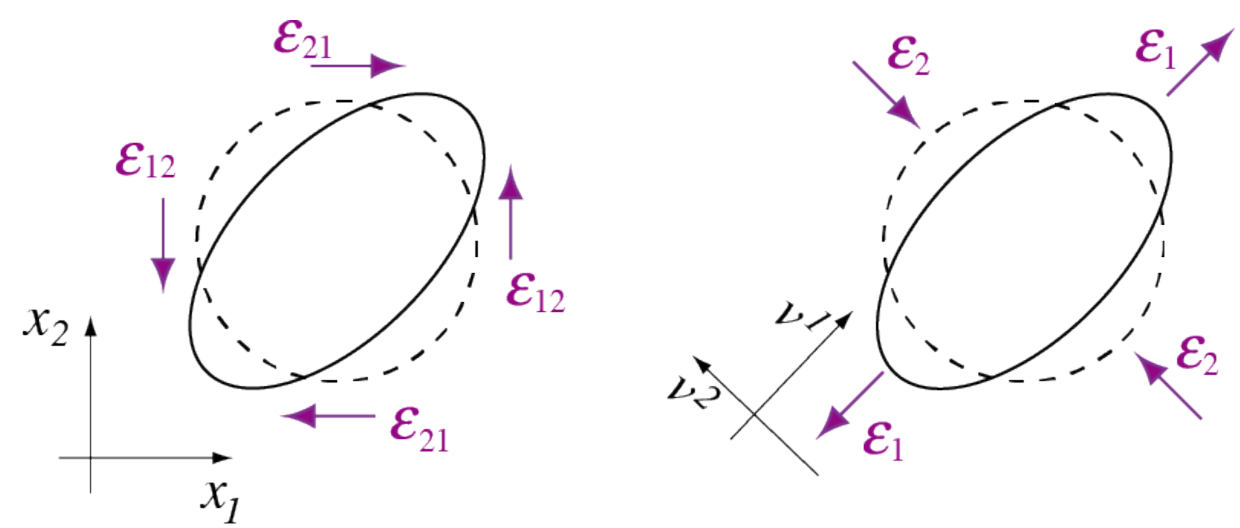
応力テンソルと同様にして、固有値を使って対角化すると、

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \mathbf{R} \begin{pmatrix} \varepsilon_{1} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{3} \end{pmatrix} \mathbf{R}^{T}$$

つまり、歪みは、軸方向の歪みのみに変換できる。求まった固有値を主歪みと呼ぶ。応力と同様に、不変量は三成分存在する。

2次元で考えるとちょっと楽



体積変化を表現する、体積歪みは、行列の trace で第一不変量

$$\Delta V = tr[\mathbf{E}] = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$
$$= \varepsilon_{1} + \varepsilon_{2} + \varepsilon_{3}$$

となる。

2-3) 面積歪み

２次元で面積歪みを考えると、

$$\varepsilon_m = \frac{dx_1(1+\varepsilon_{11})dx_2(1+\varepsilon_{22}) - dx_1 dx_2}{dx_1 dx_2}$$

$$\simeq \varepsilon_{kk} = u_{k,k}$$

GPS観測によって高精度で地殻の変位が求まるので、面積歪みの分布を求めることができる。

ラプラシアン（復習）

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2}$$

と書ける。ベクトルにも、スカラーにも作用させることができる。

波動方程式 $\ddot{\mathbf{u}} = c^2 \nabla^2 \mathbf{u}$

時間の二回微分と空間の二回微分が釣り合う。

拡散方程式 $\dot{\varphi} = \kappa \nabla^2 \varphi$

時間の二回微分と空間の一回微分が釣り合う。

ポアソン方程式 $\nabla^2 \phi = \varphi$

右辺が０のときラプラス方程式となり、解は調和関数となる。

2-4）体積変化・回転

体積変化は、

$$\varphi = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}$$

$$= \nabla \cdot \mathbf{u}$$

回転は、

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u}$$

任意のベクトルは、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを用いて

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \mathbf{A}$$

と書ける。付帯条件は

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

体積変化は、

$$\varphi = \nabla \cdot \nabla \phi + \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi$$

回転は、

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \left(\nabla \times \nabla \phi + \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{2} \left(\nabla \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \nabla^2 \mathbf{A}$$

まとめると、二つのポアソン方程式を得る

$$\varphi = \nabla^2 \phi$$

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \nabla^2 \mathbf{A}$$

体積変化と回転は別々に扱える。

3-1) 構成則（弾性体）

いくら歪み分布が求まっても、応力分布は良く分からない。理解するためには、歪みと応力の関係式（構成則）が必要。一般化されたフックの法則は、

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

と書ける。弾性係数テンソルCは弾性体の性質による値で、実に9x9=81個もの成分を持つが、実際に独立なのは21成分

等方的と仮定すると、弾性係数テンソルは、ラメの定数を用いて、

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

と書ける。

せん断応力の場合を考えると

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \left[\lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\right]\varepsilon_{kl}\\ &= \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\varepsilon_{kl} = \mu\varepsilon_{ij} + \mu\varepsilon_{ji}\\ &= 2\mu\varepsilon_{ij}\end{aligned}$$

となり、同じ成分の歪みのみを考えれば良い。垂直応力の場合を考えると、

$$\begin{aligned}\sigma_{ii} &= \left[\lambda\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{il} + \delta_{il}\delta_{ik}\right)\right]\varepsilon_{kl}\\ &= \lambda\varepsilon_{kk} + 2\mu\varepsilon_{ii}\end{aligned}$$

となり、他の垂直歪み成分も考慮する必要がある。

3-2) 構成則（他の物質）

流体の場合は、

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

で、理想気体の時は、

$$p = \rho RT$$

が状態方程式。

線形粘性体（ニュートン流体）の場合は

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + H_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}$$

となり、Hはどのように変形すのかを表すテンソル。等方媒質の場合は、

$$H_{ijkl} = \zeta\delta_{ij}\delta_{kl} + \eta\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

と書ける。よって、

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \zeta\dot{\varepsilon}_{kk}\delta_{ij} + 2\eta\dot{\varepsilon}_{ij}$$

簡単にするために、非圧縮を仮定すると、

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta\dot{\varepsilon}_{ij}$$

流体の場合は、いくら歪んでも、応力は蓄積しない。

線形粘弾性体の場合はちょっと面倒、

$$\sigma_{ij}(t) = G_{ijkl}(t) * \dot{\varepsilon}_{kl}(t)$$

ここで、Gは緩和テンソルと呼ばれ、応力と歪みをつなぐ。＊は畳み込み積分
フーリエ変換をすると楽になる。

$$\tilde{\sigma}_{ij}(\omega) = i\omega\tilde{G}_{ijkl}(\omega)\tilde{\varepsilon}_{kl}(\omega)$$

ラプラス変換して解く場合が多い。
弾性体と同じように解くことができる（対応原理）。

3-3) 弾性体の運動方程式　その１

運動方程式

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i$$

歪み

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

構成則

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)$$

から、弾性体の運動方程式であるナビエの式が定まる。

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu)\nabla(\nabla\mathbf{u}) - \mu\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}$$

実際に求めてみる。構成則と歪みから

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij,j} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl,j} \\
&= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}\varepsilon_{kl,j} + \mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right)\varepsilon_{kl,j} \\
&= \lambda\varepsilon_{kk,i} + \mu\left(\varepsilon_{ij,j} + \varepsilon_{ji,j}\right) \\
&= \lambda u_{kk,i} + \frac{1}{2}\mu\left(u_{i,jj} + u_{j,ij} + u_{j,ij} + u_{i,jj}\right) \\
&= \lambda u_{k,ki} + \mu u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} \\
&= (\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj}
\end{aligned}$$

運動方程式に代入すると

$$(\lambda + \mu)u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} + f_i = \rho\ddot{u}_i$$

3-3) 弾性体の運動方程式　その２

ベクトル形式で書くと

$$(\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})+\mu\nabla^2\mathbf{u}+\mathbf{f}=\rho\ddot{\mathbf{u}}$$

ここで、公式

$$\nabla^2\mathbf{u}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})-\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}$$

を用いると、ナビエの式、

$$(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})-\mu\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}+\mathbf{f}=\rho\ddot{\mathbf{u}}$$

が成立する。
この式を用いれば、体積力が与えられた場合の変位を求めることができる。
じゃあ、地球内に蓄積して解放される力はどういう形になるのか？
モーメントテンソルで表現できる。
　→　地球変動科学にて

ナビエの式について考える。問題を簡単にするために、力を０にすると、

$$(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})-\mu\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}=\rho\ddot{\mathbf{u}}$$

変位ベクトルは、スカラーポテンシャルの勾配と、ベクトルポテンシャルの回転で表現できるので、

$$\mathbf{u}=\nabla\phi+\nabla\times\boldsymbol{\psi}$$

と書ける。
電磁気の時のように付帯条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\psi}=0$$

をつける。傾斜に回転成分はないし、回転成分に発散はないので、

$$\nabla\times\nabla\phi=0,\ \nabla\cdot\nabla\times\boldsymbol{\psi}=0$$

3-4) 波動方程式　その１

ナビエの式に代入すると、

$$(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\nabla\phi)-\mu\nabla\times\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\psi}$$
$$=\rho\nabla\ddot{\phi}+\rho\nabla\times\ddot{\boldsymbol{\psi}}$$

回転成分と傾斜成分は別個に扱えるので、まずは、傾斜成分について考える。

$$\rho\nabla\ddot{\phi}=(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\nabla\phi)$$
$$\therefore\rho\ddot{\phi}=(\lambda+2\mu)\nabla^2\phi$$

縦波の波動方程式になる。
左辺は慣性項、右辺は弾性力の項となる。つまり、弾性波は、慣性力と弾性力の二つの力によって伝播することになる。
P波速度は $\alpha=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}}$

次に回転成分について考える。

$$\rho\nabla\times\ddot{\boldsymbol{\psi}}=-\mu\nabla\times\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\psi}$$
$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\psi}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{\psi})-\nabla^2\boldsymbol{\psi}=-\nabla^2\boldsymbol{\psi}$$
$$\therefore\rho\ddot{\boldsymbol{\psi}}=\mu\nabla^2\boldsymbol{\psi}$$

と書ける。これはS波の波動方程式。
P波と同様、慣性項と弾性項が釣り合っている。S波速度は、

$$\beta=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

ここでラメの定数は常に正の値を持つので、横波は縦波より遅い。
$\lambda=\mu$　の場合（ポアソン物質）

$$\alpha=\sqrt{3}\beta$$

となる。

3-4) 波動方程式　その2

P波はどんな波か？

$$\mathbf{u}_p = \nabla\phi$$

x1軸方向に進行する平面波を考えると

$$\phi = A\exp\left[i\omega\left(t - x_1/\alpha\right)\right]$$

と書ける。よって変位は、

$$\mathbf{u}_p = A\begin{pmatrix} i\omega/\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\exp\left[i\omega\left(t - x_1/\alpha\right)\right]$$

進行方向のみに振動する。

S波はどんな波か？

$$\mathbf{u}_S = \nabla\times\boldsymbol{\psi}$$

同様に、平面波を仮定すると、

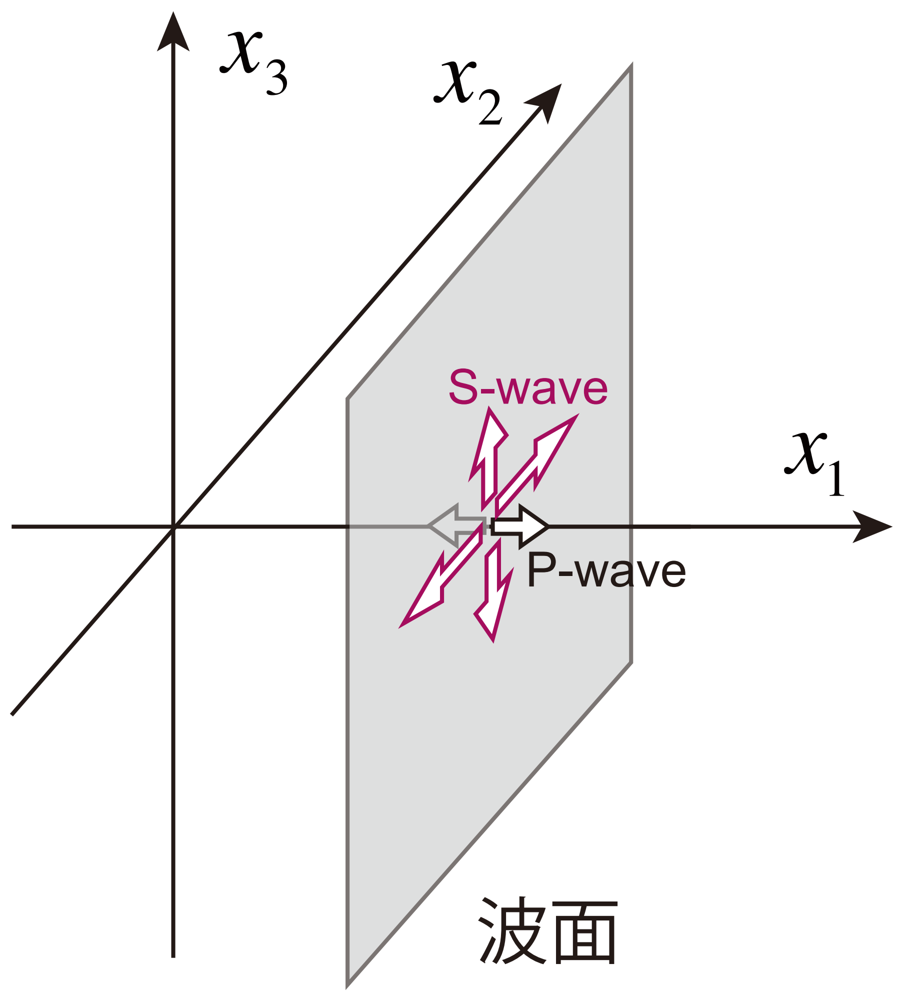
$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{A}\exp\left[i\omega\left(t - x_1/\beta\right)\right]$$

と書ける。よって変位は、

$$\mathbf{u}_S = \begin{pmatrix} 0 \\ i\,A_3\omega/\beta \\ -iA_2\,\omega/\beta \end{pmatrix}\exp\left[i\omega\left(t - x_1/\beta\right)\right]$$

進行方向と直交する方向に振動する。

3-4) 波動方程式　その３



波の伝播の様子